

ОИК

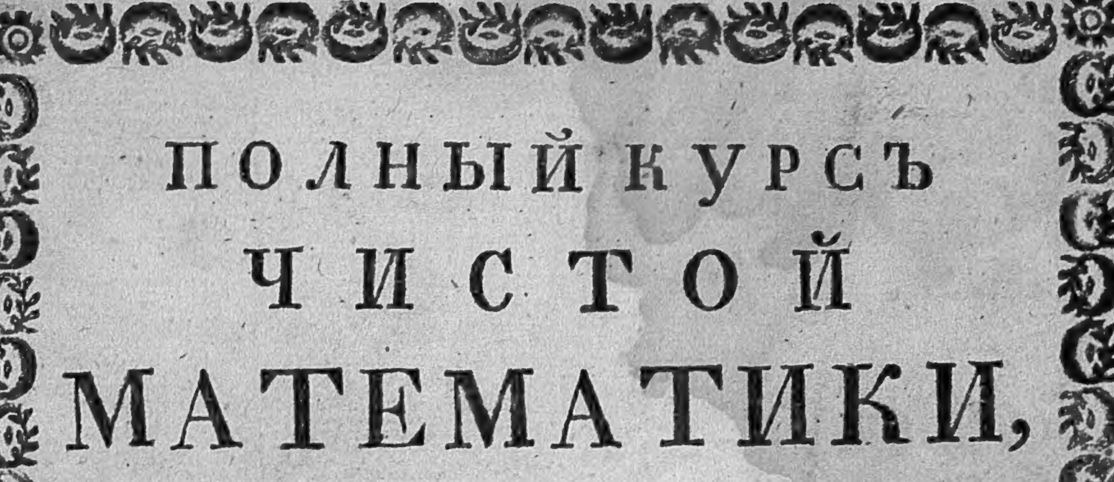
96

Дѣ[illegible] [illegible]

1 ОИК дет уч.

1824го года Декабря
28го дня

[illegible]



ПОЛНЫЙ КУРСЪ ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ,

сочиненный

Артиллерiи Штыкъ-Юнкеромъ и Математики Партикулярнымъ Учителемъ

Ефимомъ Войтяховскимъ,

въ пользу и употребленiе

ЮНОШЕСТВА

и

упражняющихся въ Математикѣ.

Томъ вторый,

исправленный

и новымъ порядкомъ расположенный.

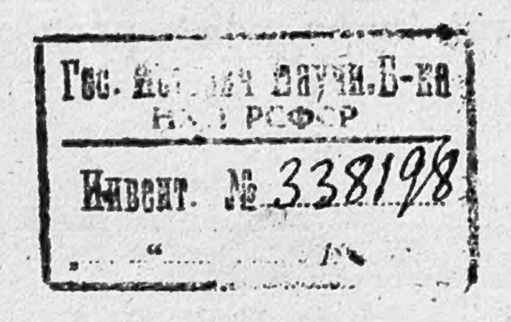
МОСКВА,

въ Типографiи Рѣшетникова.

1820.

Печатать дозволяется съ тѣмъ, чтобы по напечатаніи, до выпуска въ публику, представлены были въ Цензурный Комитетъ: одинъ экземпляръ сей книги для Цензурнаго Комитета, другой для Департамента Министерства Духовныхъ дѣлъ и Народнаго Просвѣщенія, два экземпляра для Императорской публичной Библіотеки и одинъ для Императорской Академіи Наукъ. Маія 1 дня 1819 года. Сію книгу разсматривалъ Адъюнктъ и Кавалеръ

Павелъ Щепкинъ.

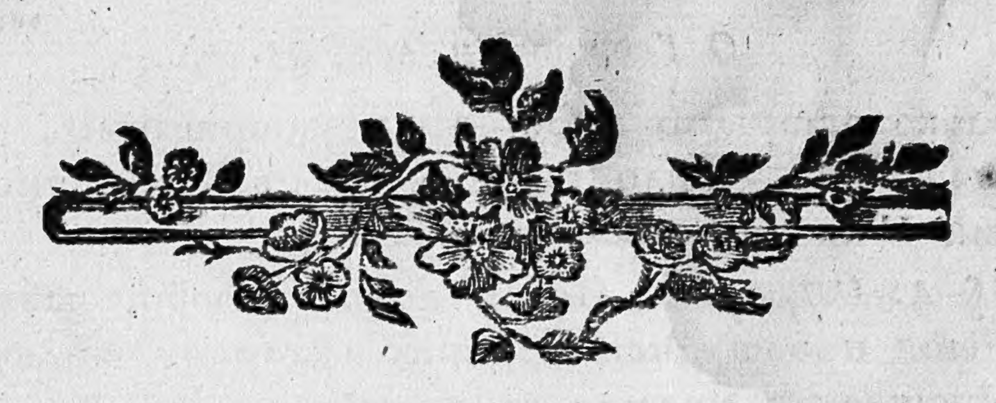


Оглавленіе Геометріи.

Стран.

Стран.

ОТДѢЛЕНІЕ III.



ПОЛНАГО КУРСА ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

О Геометрiи вообще.

§ 1. *Определенiе.* *Геометрiя* есть наука о свойствахъ величинъ, имѣющихъ пространство или протяженiе въ длину, ширину и высоту или глубину, и о измѣренiи ихъ.

Протяженныхъ величинъ суть три рода.

§ 2. *Определенiе.* *Линѣя* или *Черта* AB есть протяженiе, имѣющее только одну длину безъ ширины и глубины. *Фигура* 1.

Поверхность есть пространство, имѣющее два измѣренiя въ длину и ширину безъ толстоты, или безъ глубины, какъ на примѣръ: ABCD. *Фиг.* 2.

Тѣло есть пространство AGFC, имѣющее три измѣренiя: въ длину AB, ширину BC и высоту или глубину CE. *Фиг.* 3.

§ 3. *Определ.* *Точка Математическая* есть безконечно малое пространство, которому никакого измѣренiя не полагается, такъ что и самомалѣйшая пылинка, которую мы едва

только острымъ зрѣніемъ усматриваемъ, въ неизчетное число разъ болѣе воображаемой нами Математической точки.

§ 4. *Опредѣл.* Поверхностію вообще называется пространство длину и ширину только имѣющее; а *прямая поверхность*, или *Геометрическая плоскость* есть та, у которой всѣ точки составляющія оную, не понижаются и не возвышаются, но въ равномъ положеніи находятся, какъ *на примѣръ*: поверхность плоскаго зеркала или марморной доски; въ противномъ же случаѣ называется поверхность кривая.

Примѣчаніе. Хотя всякое пространство тѣломъ занятое, всегда при себѣ имѣетъ три измѣренія; однакожъ можно разсуждать о каждомъ измѣреніи особенно, не пріемля въ разсужденіе прочихъ; или о двухъ измѣреніяхъ вмѣстѣ, исключая третіе. *На примѣръ*: ежели говорится о разстояніи двухъ городовъ, то разсуждается объ одной только длинѣ дороги, означающей разстояніе тѣхъ мѣстъ, не помышляя о ея ширинѣ. Естьли же разсуждается о пространствѣ поля, то принимается въ разсужденіе два только измѣренія въ длину и ширину онаго, не говоря о толстотѣ земли. Когда же разсматривается пространство какого нибудь тѣла, *на прим.* каменной стѣны, тогда принимаются въ разсужденіе всѣ три измѣренія, какъ-то: длина, ширина и высота или толщина тѣла.

Геометрія въ разсужденіи трехъ родовъ протяженныхъ величинъ раздѣляется на три отдѣленія, изъ коихъ первое составляетъ *Лонгиметрію*, разсуждающую о свойствѣ линѣй и угловъ и о начертаніи разныхъ Геометрическихъ фигуръ. Второе заключаетъ въ

себѣ *Плангеометрію*, которая учитъ измѣрять, сравнивать и познавать взаимное содержаніе разныхъ Геометрическихъ плоскостей. Третіе, содержитъ въ себѣ *Стереометрію*, показывающую намъ правила о измѣреніи и содержаніи тѣлъ.

ОТДѢЛЕНІЕ ПЕРВОЕ.

О линѣяхъ и углахъ.

§ 5. Линѣи происходятъ отъ движенія точки; *на прим.* ежели предъ симъ описанная точка будетъ двигаться отъ одного мѣста A до другаго B, то оставшійся послѣ ея движенія слѣдъ будетъ линѣя или черта (*фиг.* 4). По сей причинѣ всякую линѣю можно почитать составленную изъ безконечнаго числа точекъ; слѣдовательно и концы линѣй суть точки.

§ 6. *Опредѣл. Прямая линѣя* AB есть та, которая происходитъ отъ прямаго движенія точки отъ одного мѣста A до другаго B, не совращаясь съ прямаго своего направленія.

Кривая линѣя ACB есть та, которая раждается отъ непрямаго движенія точки отъ одного мѣста A до другаго B.

Ломаная линѣя ADEFB есть та, которая составляется изъ нѣсколькихъ прямыхъ линѣй, имѣющихъ непрямое положеніе.

Слѣдствіе I. Изъ того видно, что прямая линѣя AB короче всѣхъ другихъ линѣй между двумя точками A и B проведенныхъ; ибо легко понять можно, что ежели, вытянувъ кривую ACB или ломаную ADEFB прямо, по-

ложить на прямую АВ, то каждая изъ послѣднихъ будетъ болѣе прямой АВ.

Слѣдств. II. Изъ тогожъ явствуетъ, что между двухъ точекъ А и В, болѣе одной прямой черты провесть не можно; кривыхъ же разнаго рода линѣй столько проведено быть можетъ, сколько кому угодно. Естьли же двѣ какія нибудь линѣи помѣщаются между двумя точками А и В такъ, что одна другую во всѣхъ частяхъ совершенно покрываетъ, то такія линѣи будутъ равны между собою.

Слѣдств. III. Положеніе прямой линѣи АВ опредѣляется чрезъ двѣ точки А и В (*фиг.* 5.), то есть: когда назначатся двѣ точки А и В, то положа подлѣ ихъ обыкновенную прямую линѣйку, проведется прямая черта АВ; отъ одной же точки А, хотя и можно провести нѣсколько прямыхъ линѣй АС, АВ и АF; но онѣ могутъ быть безпредѣльной длины и различнаго положенія.

Слѣдств. IV. Двѣ прямыя линѣи пересѣкаются только въ одной точкѣ А, ибо каждая изъ нихъ происходитъ отъ движенія точки; слѣдовательно и взаимное ихъ сѣченіе будетъ точка. *Фиг.* 13.

Примѣчаніе. Прямыя и кривыя линѣи, кои мы начертываемъ на бумагѣ и всякой другой поверхности, какъ бы они тонкй не были, но имѣютъ нѣкоторую ширину; ибо конецъ карандаша, пера или другаго орудія, которое мы при начертаніи линѣй употребляемъ, такъ остро сдѣлать не можно, чтобы онъ могъ представлять намъ математическую точку (§ 3); и слѣдовательно, имѣя хотя самомалѣйшую длину и ширину, производитъ

линѣю съ нѣкоторою шириною. Но поелику послѣ начертанія карандашемъ или чернилами линѣи остаются на поверхности безконечно малыя тѣхъ веществъ частицы; то изъ сего заключить можно, что такимъ образомъ изображенныя линѣи имѣютъ безконечно малую толстоту.

§ 7. Прямыя и кривыя линѣи вообще измѣряются прямыми линѣями постоянной величины за единицу принятыми, какъ-то: *саженьми, футами, дюймами* и прочая. Сажени означаются чрезъ (0), футы чрезъ (′), дюймы чрезъ (″) и такъ далѣе; на примѣръ: 59°, 4′, 9″, означаютъ 59 саженъ, 4 фута, 9 дюймовъ. Для способности же въ выкладкахъ Геометрическихъ, всякая сажень раздѣляется на 10 футовъ, футъ на 10 дюймовъ, дюймъ на 10 линѣй и прочая, и въ разсужденіи такого раздѣленія именуется *мѣрою Геометрическою.*

§ 8. *Прибавленіе.* Произхожденіе плоской поверхности, описанной въ § 4мъ, можно представить себѣ еще и такимъ образомъ, что оная произходитъ отъ движенія прямой линѣи AD по двумъ прямымъ линѣямъ AB и DC (*фиг.* 2); ибо во время движенія прямой линѣи AD, всякая оной точка произведетъ безмѣрно малой ширины линѣю, кои соединяясь одна съ другою, составятъ плоскую поверхность ABCD; по сей причинѣ всякую поверхность почитать можно состоящую изъ безконечнаго числа линѣй.

§ 9. *Опредѣл. Линѣя круговая* BDCHB есть кривая линѣя, описывающая концемъ B прямой линѣи AB (*фиг.* 6), обращающейся около неподвижной точки A, то есть: когда прямая

линѣя АВ будетъ обращаться около одного своего конца пребывающаго въ точкѣ А, до тѣхъ поръ, пока опять придетъ на прежнее свое мѣсто, то во время сего обращенія другой ея конецъ В изобразитъ на плоскости помянутую круговую линѣю. Пространство, на плоскости сею кривою линѣею огреничениое, называется *Кругъ*. Неподвижная точка А именуется *Центръ* или *Средоточіе круга*. Круговая линѣя BDEHB именуется *Окружность круга*. Прямыя линѣй АВ, АЕ и АН изъ центра А къ окружности круга проведенныя, называются *Радіусы* или *Полупоперешники*. Прямая линѣя ЕАВ, отъ одной точки В окружности къ другой Е чрезъ центръ круга проведенная, именуется *Діаметръ* или *Поперешникъ круга*. Часть CD или DB окружности круга, называется *Дуга*. Линѣя CD не чрезъ центръ круга проходящая, концами съ окружностію соединяющаяся, называется *Хорда* или *Тетива* стягивающая малую дугу CD, или большую DBHC.

Слѣдств. Изъ сего видно, что кругъ есть пространство на плоскости опредѣленное, такого свойства кривою линѣею, что всякая оной точка отъ центра А находится въ равномъ разстояніи. Слѣдовательно въ кругѣ всѣ радіусы равны, также и діаметры ЕВ и НМ суть равны между собою; ибо каждой изъ нихъ равенъ суммѣ двухъ радіусовъ.

§ 10. ТЕОРЕМА. *Всякой кругъ и окружность онаго, діаметромъ* ЕВ *раздѣляется на двѣ равныя части.*

Доказател. Вообразимъ себѣ, что часть EDB сего круга съ діаметромъ ЕВ, положится на другую часть ЕНВ, то всѣ точки час-

ти EDB окружности непремѣнно упадутъ на всѣ точки другой части EHB по свойству круга (§ 9. *Слѣд.*); по сему пространство ECDB круга совершенно закроетъ пространство другой части EMHB круга; слѣдовательно оныя части равны, и каждая равна половинѣ круга; также и часть ECDB окружности равна другой части EHB (§ 6. *Слѣд.* 2), и каждая изъ нихъ равна половинѣ окружности круга; ибо часть ECDB окружности не можетъ упасть внѣ или внутри части EHB окружности, потому что въ такомъ случаѣ всѣ точки окружности круга уже не будутъ въ равномъ разстояніи отъ центра A, и слѣдовательно будетъ противно положенію (§ 9. *Слѣд.*).

Слѣдств. Изъ сего непосредственно видно, что на всякой прямой линѣи EB, изъ какой нибудь точки, *на прим.* изъ A, произвольнымъ радіусомъ опишется полкруга.

§ 11. *Опредѣл.* Геометры окружность всякаго круга раздѣляютъ на 360 равныхъ частей (*), изъ коихъ каждая часть называется *Степень* или *Градусъ*. Градусъ раздѣляется на 60 *Минутъ*, минута на 60 *Секундъ*, секунда на 60 *Терцій*, и такъ далѣе. Градусы означаются чрезъ (0), минуты чрезъ ('), секунды чрезъ (''), и такъ далѣе; *на прим.* 7°, 28', 32'', 56''', значитъ 7 градус. 28 минутъ, 32 секунды, 56 терцій.

Примѣч. Поелику окружности круговъ могутъ быть различной величины, слѣдовательно и граду-

(*) Причина сего раздѣленія есть та, что число 360 на многія равныя части раздѣлиться можетъ.

сы одинакой величины быть не могутъ; по сему градусъ есть количество непостоянное, но токмо $\frac{1}{360}$ часть окружности своего круга.

§ 12. *Опредѣл.* Когда двѣ линѣи AB и AC концами соединятся въ одну точку A (*фиг.* 7), то взаимное ихъ наклоненіе, или заключающееся между ими отверстіе называется *Плоскостной уголъ.* Линѣи AB и AC называются *Боками угла.* Точка A ихъ соединенія именуется *Верхъ угла.*

Примѣч. Уголъ означается одною буквою, *на пр.* A, у верха угла поставленною (*фиг.* 7); а когда нѣсколько угловъ будутъ имѣть общій верхъ A (*фиг.* 5); тогда каждой изъ нихъ означается тремя буквами, какъ-то: CAB, BAF и CAF, изъ коихъ средняя буква A всегда означаетъ верхъ угла.

§ 13. *Опредѣл.* Углы въ разсужденіи ихъ боковъ раздѣляются на три рода: *Прямолинѣйной уголъ* CAB есть тотъ, у котораго бока AB и AC прямыя линѣи (*фиг.* 7). *Криволинѣйной уголъ* BDE есть тотъ, коего бока BD и ED суть кривыя линѣи (*фиг.* 8). *Смѣшанно-линѣйной уголъ* BAD есть тотъ, у котораго одинъ бокъ есть прямая AD, а другой кривая линѣя AB (*фиг.* 9).

§ 14. ТЕОРЕМА. *За мѣру угла DAB берется дуга DCB, изъ верьха его A произвольнымъ радіусомъ описанная.* Фиг. 10.

Доказательство. Представимъ себѣ, что бокъ AD угла DAB положится на бокъ AB, и конецъ его D будетъ находиться въ точкѣ B; потомъ не отдѣляя одного своего конца отъ точки A, другимъ D находящимся въ точкѣ B начнетъ отдвигаться, то точка D будетъ

описывать дугу BCED круга, и чѣмъ конецъ D линѣи AD далѣе отъ линѣи AB отходить будетъ, то есть: чѣмъ отверстіе угла BAD будетъ разширяться болѣе, тѣмъ и дуга BCED будетъ постепенно увеличиваться; по сему дуга BCED опредѣляетъ величину отверстія угла BAD, и слѣдовательно есть мѣра угла.

Слѣдств. I. Поелику уголъ происходитъ также какъ и кругъ, и мѣра угла DAB есть часть окружности круга; по сему сколько дуга BD или GF содержитъ въ себѣ градусовъ, минутъ и проч., столько оныхъ и уголъ BAD имѣть будетъ. Слѣдовательно величина угловъ познается чрезъ содержаніе дуги BD къ цѣлой окружности круга.

Слѣдств. II. Изъ того удобно видѣть можно, что величина угловъ не зависитъ отъ длины боковъ AB и AD, но отъ взаимнаго сихъ боковъ наклоненія; ибо ежели верьхъ A угла CAB (*фиг.* 7), положится на верьхъ A другаго угла DAB (*фиг.* 10), и бока AC и AB перваго, упадутъ на бока AB и AD втораго, тогда не смотря на то, что бока перваго будутъ короче боковъ другаго, углы будутъ равны между собою; слѣдовательно величина угла не перемѣнится, когда его бока AG и AF сдѣлаются короче боковъ AB и AD (*фиг.* 10); по тому что уголъ DAB измѣряться можетъ какъ дугою DB, такъ и дугою GF, изъ коихъ каждая, опредѣляя величину отверстія одного угла DAB, имѣетъ одно число гладусовъ отъ окружности своего круга.

Примѣч. Ежели верьхъ A угла CAB (*фиг.* 7) положится на верьхъ другаго DAB (*фиг.* 10), такъ

что бокъ AC перваго, упадетъ на бокъ AB послѣдняго; а другой бокъ AB перваго, упадетъ внутри другаго угла DAB, *на прим.* на линѣю AE, тогда первой уголъ CAB будетъ меньше втораго угла DAB; но ежели бокъ AB перваго угла упадетъ внѣ угла BAD втораго, то первой будетъ больше послѣдняго.

§ 15. *Опредѣл.* Прямоугольные углы въ разсужденіи величины ихъ отверстія раздѣляются на три рода: *Прямой уголъ* BAD или BAI (*фиг.* 11.) есть тотъ, у коего измѣряющая его дуга EFC или CG равна четверти окружности. *Острой уголъ* HAD есть тотъ, у котораго измѣряющая дуга EF есть менѣе четверти окружности. *Тупой уголъ* IAH есть тотъ, когда измѣряющая его дуга GCF будетъ болѣе четверти окружности. Слѣдовательно всякой прямой уголъ имѣетъ 90 градусовъ, острой меньше, а тупой больше 90 град. Тупые и острые углы вообще именуются *косые*.

§ 16. *Опредѣл. Смѣжные углы* называются тѣ, кои имѣютъ общій верхъ A и одинъ общій бокъ AH, какъ-то углы HAD и HAB, также HAD и HAI суть углы смѣжные (*фиг.* 11).

§ 17. ТЕОРЕМА. *Ежели нѣсколько линѣй* AB, AH *и проч. соединятся въ одну точку* A *лежащую на прямой линѣи* ID, *то сумма всѣхъ угловъ* HAD, HAB *и* BAI *будетъ равна двумъ прямымъ угламъ или* 180 *градусамъ* (Фиг. 11).

Доказат. Ежели изъ точки A взятой за центръ, на прямой линѣи ID опишется полкруга, то будетъ мѣра угла HAD = дугѣ EF, мѣра угла HAB = дугѣ FC, и мѣра угла BAI = дугѣ CG (§ 14); по сему мѣра всѣхъ угловъ HAD + HAB + BAI равна половинѣ окружности EFCG круга, которая содержитъ въ себѣ

180 град.; слѣдовательно и сумма всѣхъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ или 180 град.

Слѣдств. Ежели въ точку A, лежащую на прямой линѣи ID, проведется одна линѣя AB, такъ что смѣжные углы DAB и BAI будутъ равны, то каждой изъ нихъ будетъ прямой; ибо тогда будетъ дуга CFE равна дугѣ GC, и каждая равна четверти окружности.

§ 18. ТЕОРЕМА. *Ежели нѣсколько линѣй* AC, CD, CB *и проч. соединятся въ одну точку* C, *то сумма всѣхъ угловъ* ACD, DCB, BCN *и проч. будетъ равна четыремъ прямымъ угламъ или 360 градусамъ.* (Фиг. 12.

Доказ. Ежели изъ общаго верьха C всѣхъ угловъ, взятаго на центръ, опишется цѣлая окружность круга, то между каждыми двумя боками AC, CD, CB, CN и CE содержащіяся дуги ab, bc, cd, de и ea будутъ мѣрою угловъ ACD, DCB, BCN, NCE и ECA (§ 14); но всѣ оныя дуги вообще составляютъ цѣлую окружность круга, имѣющую въ себѣ 360 град.; слѣдовательно и сумма всѣхъ тѣхъ угловъ равна 360. град. или 4мъ прямымъ угламъ.

§ 19. *Опредѣл.* Два угла HAD и HAB, составляющіе вмѣстѣ 90 град. (*фиг.* 11), называются *дополненіемъ* одинъ другаго, какъ-то: уголъ HAD есть дополненіе угла HAB; а уголъ HAB есть дополненіе угла HAD до 90 град. Равнымъ образомъ два угла HAD и HAI, составляющіе вмѣстѣ 180 град., называются *дополненіемъ* одинъ другаго, какъ-то: уголъ HAD есть дополненіе угла HAI, а уголъ HAI есть дополненіе угла HAD до 180 град., или до двухъ прямыхъ угловъ.

Слѣдств. Изъ сего явствуетъ, что дополненіе угла HAD до 90 град. есть уголъ HAB острой; дополненіежъ остраго угла HAD до 180 град. есть уголъ HAI тупой; а дополненіе тупаго угла HAI до 180 град. есть уголъ DAH острой; дополненіежъ прямаго угла DAB до 180 град. есть уголъ BAI прямой. Слѣдовательно дополненія равныхъ угловъ суть равны между собою; и обратно, когда дополненія одинакихъ угловъ равны, то и дополняемые углы будутъ равны.

§ 20. *Опредѣл. Углы* BAC и DAE *противуположенные* суть тѣ, коихъ бока AB и AC одного угла находятся въ прямомъ положеніи съ боками AD и AE другаго угла (*фиг.* 13).

§ 21. ТЕОРЕМА. *Углы* BAC *и* EAD *противуположенные суть равны между собою.*

Доказ. Поелику уголъ $BAC + \angle BAE = 180°$, и уголъ $BAE + \angle EAD = 180°$ (§ 17); по сему уголъ $BAC + \angle BAE = \angle BAE = + \angle EAD$ (*Ариѳм.* § 20); а отнявъ отъ обоихъ количествъ уголъ BAE, останется уголъ $BAC = \angle EAD$ (*Ариѳм.* § 32).

О равенствѣ треугольниковъ и о свойствѣ перпендикулярныхъ и параллельныхъ линѣй и прочая.

§ 22. *Опредѣл.* Ежели концы линѣй AB и AC, составляющихъ прямолинѣйной уголъ BAC, соединены будутъ прямою линѣею BC, то пространство, тремя линѣями AC, AB и BC на плоскости опредѣленное, называется *треугольникъ* или *трехбочникъ* (*фиг.* 14). Линѣи AC, AB и BC называются *бока треугольника.*

Примѣч. Изъ сего видно, что всякой треугольникъ состоитъ изъ шести частей, то есть: изъ трехъ боковъ и трехъ угловъ, и что всякое пространство, на плоскости прямыми линѣями окруженное, менѣе трехъ боковъ имѣть не можетъ.

§ 23. *Опредѣл.* Треугольники въ разсужденіи ихъ боковъ и угловъ имѣютъ различныя названія: *Равносторонной* или *равнобочной треугольникъ* ABC есть тотъ, у котораго всѣ бока между собою равны (*фиг.* 14).

Равнобедренной треугольникъ CDF есть тотъ, у коего два бока CD и FD равны, а третій CF болѣе или менѣе каждаго изъ первыхъ (*фиг.* 15).

Неравносторонній треугольникъ DEF есть тотъ, у котораго всѣ три бока не равны (*фиг.* 16).

Прямоугольной треугольникъ ABC есть тотъ, у котораго одинъ уголъ A прямой. Въ семъ треугольникѣ бокъ BC, лежащій противъ прямаго угла A, именуется *діогональ* (*фиг.* 17).

Тупоугольной треугольникъ CDE есть тотъ, у котораго одинъ уголъ E тупой (*фиг.* 18).

Остроугольной треугольникъ CDE есть тотъ, у котораго всѣ три угла острые (*фиг.* 19).

§ 24. *Опредѣл. Перпендикулярная* или *Отвѣсная линѣя* AB къ другой ID есть та, которая упадая на линѣю ID, составляетъ съ нею съ обоихъ сторонъ равные или прямые углы DAB и IAB (§ 17. *Слѣд. фиг.* 11).

§ 25. *Опредѣл.* Во всякомъ треугольникѣ DCE (*фиг.* 18 и 19), изъ верьха какого нибудь угла, *на прим.* D, на противулежащій оному

бокъ CE (*фиг.* 19), или на продолженіе онаго EN (*фиг.* 18), перпендикулярно проведенная линія DN, называется высота треугольника DCE; а бокъ CE въ обѣихъ случаяхъ именуется основаніемъ треугольника DCE.

§ 26. ТЕОРЕМА. *Когда два бока AB, BC и между ими уголъ ABC одного треугольника ABC, равны двумъ бокамъ DE, EF и между ими углу DEF другаго треугольника EFD, то такіе треугольники будутъ во всѣхъ частяхъ совершенно равны.* (Фиг. 20.

Доказ. Ежели вообразимъ себѣ, что треугольникъ ABC положится на треугольникъ DEF, такъ чтобы точка B упала на точку E и бокъ AB положился на бокъ DE, то въ разсужденіи равенства сихъ боковъ точка A упадетъ на точку D (§ 6. *Слѣд.* 2); но поелику уголъ ABC=∠DEF, то и бокъ BC положится на бокъ EF (§ 14. *Слѣд.* 2), и для равенства ихъ точка C упадетъ на точку F; по сему бокъ AC упадетъ на DF и его закроетъ, и всѣ части треугольника ABC положатся на всѣ части треугольника DEF; слѣдовательно оные треугольники во всѣхъ частяхъ совершенно равны, то есть бокъ AC=DF и уголъ A=∠D, ∠C=∠F.

§ 27. ТЕОРЕМА. *Когда бокъ AC и при немъ два угла A и C одного треугольника ABC, равны боку DF и при немъ двумъ угламъ D и F другаго треугольника EDF, тогда такіе треугольники будутъ во всѣхъ частяхъ совершенно равны.* (Фиг. 20.

Доказ. Представимъ себѣ, что треугольникъ ABC положится на треугольникъ DEF такимъ образомъ, чтобы точка A упала на точку D, и бокъ AC положился на бокъ DF,

то для равенства сихъ боковъ точка C упадетъ на точку F; а для равенства угловъ A и D бокъ AB положится на бокъ DE, и для равенства угловъ C и F бокъ CB упадетъ на бокъ FE (§ 14. *Слѣд.* 2); по сему точка B непремѣнно упадетъ на точку E, и всѣ части треугольника ABC будутъ находиться на всѣхъ частяхъ треугольника DEF; слѣдовательно такiе треугольники во всѣхъ частяхъ равны, то есть, AB=DE, BC=EF и уголъ B=∠E.

Но естьли кто скажетъ, что точка B будетъ находиться въ точкѣ G, а не въ точкѣ E, то сему быть не возможно; ибо когда точка B упадетъ на точку G, тогда и бокъ AB вмѣстѣ съ точкою B долженъ будетъ упасть на линѣю DG, проведенную изъ точки D въ G; но поелику уголъ EDF=∠BAC по положенiю; уголъ же FDG меньше угла FDE (§ 14. *Прим.*), и слѣдовательно меньше равнаго ему угла CAB; по сей причинѣ бокъ AB не можетъ инако положиться, какъ только на линѣю DE, и слѣдовательно точка B непремѣнно упадетъ на точку E, а не на другую какую-либо точку G.

§ 28. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ равнобедренномъ треугольникѣ* ABC, *противъ равныхъ боковъ* AC *и* BC *углы* ABC *и* CAB *равны.* (Фиг. 21.

Доказ. Продолживъ бока CA и CB, положимъ посредствомъ циркула произвольной величины равныя линѣи AD и BE, и проведемъ прямыя линѣи DB и EA, то будетъ треугольникъ CDB=△CEA, потому что бокъ CD треугольника BCD, равенъ боку CE△CAE, также другой бокъ CB=CA по положенiю, и уголъ DCB общiй обоимъ треугольникамъ; а такiе треугольники по § 26му, во всѣхъ частяхъ совершенно равны; слѣдовательно бокъ DB=

AE и ∠CDB=∠AEC. Также будетъ треугольникъ DBA=△BAE; ибо бокъ AD=BE по положенію, бокъ DB=AE и уголъ ADB=∠AEB доказано, и слѣдовательно по § 26му будетъ ∠DAB=∠ABE; но поелику каждой изъ сихъ угловъ есть дополненіе смѣжныхъ угловъ CAB и ABC до 180 град., то по слѣдствію § 19 будетъ и уголъ CAB=∠ABC.

§ 29. ТЕОРЕМА. *Когда три бока треугольника ABC равны порознь тремъ бокамъ другаго треугольника GEF, то есть: ежели бокъ AB=GF, AC=GE и BC=EF, то такіе треугольники будутъ во всѣхъ частяхъ совершенно равны.* Фиг. 22.

Доказ. Представимъ себѣ, что треугольникъ GEF однимъ своимъ бокомъ GF приложится къ боку AB треугольника ABC, такъ чтобы точка G была въ точкѣ A, то для равенства боковъ GF и AB, точка F будетъ находиться въ точкѣ B; верьхъ же угла E треугольника GEF пусть будетъ въ точкѣ D; то соединя точки C и D прямою линѣею CD, произойдетъ два равнобедренныхъ треугольника CDA и CDB, потому что бокъ AC=AD=EG и BC=BD=EF по положенію, и для того будетъ уголъ ACD=∠ADC и DCB=∠BDC (§ 28); по сему уголъ ACD+DCB=ADC+BDC, то есть уголъ ACB=∠ADB (*Ариѳм.* § 27); слѣдовательно треугольникъ ACB=△ADB=△GEF (§ 26), и уголъ CAB=∠BAD=∠G, уголъ ABC=∠ABD=∠F.

§ 30. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ треугольникѣ DFE, сумма двухъ боковъ DE+EF больше третьяго DF.* Фиг. 16.

Доказ. Когда прямая DF есть короче всѣхъ другихъ линѣй между двумя точками D и F

проведенныхъ (§ 6. *Слѣд.* 1), то всякая другая линѣя, кромѣ прямой, соединяющая двѣ точки D и F, какъ здѣсь ломаная DEF, будетъ больше прямой DF (§ 6. *Слѣд.* 1); слѣдовательно сумма двухъ боковъ DE+FE>DF.

§ 31. ЗАДАЧА. *На данной прямой линѣѣ AB начертить равносторонной треугольникъ.* Фиг. 23.

Рѣшен. Поставя ножку циркула въ точкѣ A, раствореніемъ линѣи AB начерти дугу y; потомъ поставя ножку циркула въ точкѣ B, тѣмъ же раствореніемъ начерти другую дугу x, которая бы пересѣклась съ первою въ точкѣ C; наконецъ проведя прямыя линѣи AC и BC, изобразится равносторонной треугольникъ ABC.

Доказ. Поелику AB=AC и BA=BC по рѣшенію; по сему и AC=BC=AB (*Ариѳм.* § 20); слѣдовательно всѣ три бока равны между собою; и треугольникъ ABC есть равносторонній (§ 23).

§ 32. ЗАДАЧА. *По даннымъ двумъ линѣямъ AD и BC начертить равнобедренный треугольникъ.* Фиг. 24.

Рѣшен. Проведя линѣю AB равную данному основанію AD, возьми циркулемъ величину данной линѣи BC; потомъ изъ точекъ A и B основанія AB, взятымъ раствореніемъ циркула, опиши двѣ дуги взаимно пересѣкающіяся въ точкѣ C; наконецъ проведи линѣи AB и BC, то получится требуемой треугольникъ ABC.

Доказ. Поелику бокъ AC=BC, равнымъ раствореніемъ описаны дуги; слѣдовательно треугольникъ ABC есть равнобедренный (§ 23).

§ 33. ЗАДАЧА. *По даннымъ тремъ линѣямъ AB, DC и BC начертить треугольникъ.* Фиг. 25.

Рѣшен. и *Доказ.* Взявъ одну изъ данныхъ линѣй, *на прим.* AB за основаніе, изъ точки A раствореніемъ циркула, равнымъ линѣи DC опиши дугу, а изъ точки B раствореніемъ циркула равнымъ линѣи BC, опиши другую дугу; потомъ въ точку C, гдѣ дуги пересѣкутся, проведя линѣи AC и BC, начертится требуемой треугольникъ ABC.

Примѣч. Въ семъ случаѣ надлежитъ примѣчать, чтобы сумма всякихъ двухъ данныхъ линѣй была больше одной третьей данной линѣи; ибо въ противномъ случаѣ дуги не пресѣкутся, а потому и треугольникъ изобразиться не можетъ (§ 30).

§ 34. ЗАДАЧА. *У точки A данной линѣи AB, сдѣлать уголъ равенъ данному углу GFH.* (Ф. 26.

Рѣшен. Изъ точки F произвольнымъ раствореніемъ циркула, описавъ дугу *ik*, точки *i* и *k* соедини прямою линѣею *ik*; потомъ, поставя ножку циркула въ концѣ A, данной линѣи AB, тѣмъ же раствореніемъ начерти дугу *de*, а изъ точки *d* величиною хорды *ik* опиши другую дугу, пересѣкающуюся съ первою въ точкѣ *e*; наконецъ изъ точки A, чрезъ точку *e* проведя линѣю AC, получится уголъ BAC равенъ данному углу GFH.

Доказ. Поелику $Ad=Fi$, $Ae=Fk$, и $de=ki$ по рѣшенію, а потому и треугольникъ $Ade=\triangle Fik$ (§ 29); слѣдовательно и уголъ $BAC=\angle GFH$.

Прибавл. Для начертанія угла, содержащаго въ себѣ извѣстное число градусовъ, употребляется *Транспортиръ* (*). *На прим.* ежели дол-

---

(*) *Транспортиръ* или *Угломѣръ* W есть мѣдное или костяное орудіе, состоящее изъ полукруга,

жно будетъ у точки А данной линѣи АВ (*фиг.* 28), сдѣлать уголъ въ $42\frac{1}{2}$ градуса, то взявъ транспортивъ W (*фиг.* 27), положи его на линѣю АВ такъ, чтобы центръ его *a* находился въ точкѣ А, а діаметръ онаго положился на линѣю АВ, и отсчитавъ по дугѣ транспортира отъ *c* до *d* $42\frac{1}{2}$ градуса, замѣть точкою *d*; потомъ снявъ транспортиръ, проведи изъ А чрезъ замѣченную точку *d*, линѣю АН, тогда получится уголъ НАВ требуемаго числа градусовъ.

§ 35. ЗАДАЧА. *Данной уголъ* ВАС *раздѣлить на двѣ равныя части.* (Фиг. 29.

Рѣшен. Изъ верха А даннаго угла ВАС, положи произвольной величины равныя линѣи AD и АЕ; потомъ изъ точекъ D и E, произвольно взятымъ раствореніемъ циркула, начерти дуги пересѣкающіяся въ точкѣ F; наконецъ изъ верха А чрезъ точку F, проведи линѣю АН, то оная данной уголъ ВАС раздѣлитъ на двѣ равныя части.

Доказ. Проведя линѣи DF и EF, будетъ треугольникъ AFD=ΔAEF; ибо AD=AE по положенію, DF=EF равнымъ раствореніемъ описаны дуги, и AF общій бокъ обоимъ треугольникамъ; но такіе треугольники по § 29 равны, слѣдовательно и уголъ DAF=∠EAF.

§ 36. ЗАДАЧА. *По двумъ линѣямъ* АВ, АС *и углу x, начертить треугольникъ, чтобы дан-*

коего половина окружности раздѣляется на 180 равныхъ частей означающихъ градусы (*фиг.* 27), а иногда назначаются на немъ и полуградусы. Центръ *a* транспортира означается либо точкою или линѣечкою, либо остротою угла вырѣзываемаго на линѣйкѣ *bc*, у которой бокъ *bc* есть діаметръ.

ной уголъ x заключался между данными линѣями. (Фиг. 30.

Рѣшен.* и *Доказ. Проведя основаніе AB равное данной линѣи AB, сдѣлай у точки A уголъ BAD равенъ данному x (§ 34); положи циркулемъ отъ точки A до D линѣю AD, равную данной AC; потомъ соединя точки B и D прямою линѣею BD, изобразится требуемой треугольникъ ABD.

§ 37. ЗАДАЧА. *Данную прямую линѣю* AB *раздѣлить на двѣ равныя части.* (Фиг. 31.

Рѣшен. Изъ точки A, произвольнымъ раствореніемъ циркула болѣе половины линѣи AB, опиши по обѣ стороны двѣ дуги *t* и *r*; потомъ изъ точки B, тѣмъ же раствореніемъ опиши двѣ другія дуги *z* и *x*; наконецъ чрезъ точки C и D, гдѣ дуги пересѣклись, проведи прямую линѣю CD, которая данную линѣю AB раздѣлитъ на двѣ равныя части въ точкѣ E.

Доказ. Проведя линѣи AC и BC, AD и BD, будетъ AC=BC, AD=BD по рѣшенію, и DC есть общій бокъ обоимъ треугольникамъ ADC и DBC; по сему треугольникъ ADC=△DBC (§ 29), и слѣдовательно уголъ ACD=∠BCD. Также треугольникъ AEC=△BCE; ибо бокъ AC=BC, CE общій бокъ, и уголъ ACE=∠BCE, слѣдовательно по § 26 и AE=BE.

§ 38. ЗАДАЧА. *Изъ точки* A, *на прямой линѣи* EF, *поставить перпендикуляръ.* (Фиг. 32.

Рѣшен. Поставя ножку циркула въ точкѣ A, положи на линѣю EF по обѣ стороны точки A, произвольной величины равныя части AB и AC; потомъ изъ точекъ B и C, раствореніемъ циркула болѣе половины BC, начерти двѣ дуги

взаимно пересѣкающіяся вЬ точкѣ D, чрезЬ которую проведенная изЬ точки A, прямая линѣя AN будетЬ перпендикулярна кЬ EF.

Доказ. ТреугольникЬ ABD=△ADC, потому что бокЬ BD=DC равнымЬ раствореніемЬ циркула дуги описаны, также AB=AC по положенію и AD общій бокЬ; по сему и ∠BAD=∠CAD (§ 29); а когда углы по обѣ стороны равны, то линѣя AN перпендикулярна кЬ EF (§ 24).

Прибавл. ИзЬ того явствуетЬ, что изЬ одной точки C на линѣи AB, больше одного перпендикуляра CD поставить не можно (*фиг.* 33); ибо ежели положимЬ, что другая линѣя CE будетЬ перпендикулярна кЬ AB, то будетЬ уголЬ ACE меньше угла ACD и меньше равнаго ему угла BCD, и слѣдовательно меньше угла BCE; но когда углы ACE и BCE, по обѣ стороны линѣи CE неравны, то линѣя CE не перпендикулярна кЬ AB.

§. 39. ЗАДАЧА. *ИзЬ данной точки* C, *на данную прямую линѣю* AB *опустить перпендикулярЬ.* Фиг. 34.

Рѣшен. ИзЬ данной точки C, произвольно взятымЬ радіусомЬ опиши дугу ED, которая бы разрѣзала линѣю AB вЬ двухЬ точкахЬ E и D; потомЬ линѣю ED раздѣля на двѣ равныя части вЬ точкѣ F (§ 37), проведи прямую линѣю CF, то оная будетЬ перпендикулярна кЬ AB.

Доказ. ТреугольникЬ EFC=△DFC, потому что бокЬ CE=CD радіусы, EF=FD по рѣшенію, CF общій бокЬ, по сему и ∠EFC=∠CFD (§ 29); слѣдовательно CF перпендикулярна кЬ линѣи AB (§ 24).

Прибавл. I. Поелику бокъ EC треугольника EFC, равенъ боку DC треугольника FCD, и слѣдовательно треугольникъ CED есть равнобедренный; то изъ сего удобно можно видѣть, что во всякомъ равнобедренномъ треугольникѣ основаніе ED, перпендикуляромъ CF, опущеннымъ изъ верха C дѣлится на двѣ равныя части EF и FD.

Прибавл. II. Изъ того же видно, что изъ точки G, на линѣю AB больше одного перпендикуляра GE опустить не можно (*фиг.* 35); ибо естьли положимъ, что другая GF будетъ перпендикулярна къ AB, то сему быть не возможно, потому что положа отъ точки E, на обѣ стороны произвольныя равныя части ED, EC, и произведя линѣи CG и DG, будетъ треугольникъ CGD равнобедренный; ибо ∠CEG=∠DEG прямые, бокъ CE=DE по положенію, и GE общій бокъ, слѣдовательно по § 26 CG=GD; въ равнобедренномъ же треугольникѣ DGC, изъ верха G опущенный перпендикуляръ упасть долженъ на половину основанія CD (§ 39. *Приб.* 1); но какъ CE+EF>FD, по сему линѣя GF падаетъ не на половину основанія CD, и слѣдовательно не перпендикулярна къ AB.

§ 40. ТЕОРЕМА. *Перпендикулярная линѣя AB короче всѣхъ другихъ линѣй AC и AD, изъ точки A къ линѣи EB проведенныхъ.* Фиг. 36.

Доказ. Продолжа линѣю AB, сдѣлай BF=AB и проведи CF, то будетъ △ABC=△BCF; ибо AB=BF по положенію, BC общій бокъ, и уголъ ABC=∠FBC прямые, по сему AC=CF (§ 26); но поелику ломаная линѣя ACF больше прямой ABE (§ 6. *Слѣд.* 1), слѣдовательно и

половина ломаной ACF равная AC, больше половины AB прямой AF, то есть AC больше AB. Также докажется, что AD больше AB.

Слѣдств. Изъ сего явствуетъ, что самое кратчайшее разстояніе точки A отъ линѣи BE есть перпендикуляръ AB.

§ 41. ТЕОРЕМА. *Когда два бока AC и CB, составляющіе острой уголъ ACB прямоугольнаго треугольника ABC, равны двумъ бокамъ FG и EF, составляющимъ острой уголъ EFG другаго прямоугольнаго треугольника GFE, то такіе треугольники будутъ во всѣхъ частяхъ совершенно равны.* Фиг. 37.

Доказ. Представимъ себѣ, что треугольникъ EGF приложится къ треугольнику ABC такъ, чтобы точка F была въ точкѣ C и бокъ FE положился на бокъ CB, то для равенства сихъ боковъ точка E будетъ находиться въ точкѣ B; но поелику углы ABC и GEF суть прямые, то бокъ AB съ бокомъ EG составятъ одну прямую линѣю AG (§ 24), и слѣдовательно треугольникъ ACG будетъ равнобедренный; треугольникъ же ABC будетъ равенъ треугольнику BCG, потому что уголъ ABC=CBG прямые, а по свойству равнобедреннаго треугольника ACG, бокъ AB=BG (§ 39. *Прибав.* 1) и BC есть общій бокъ; слѣдовательно △ABC=△CBG =△EFG (§ 26), и бокъ AB=BG=EG, уголъ ACB=∠BCG=∠F, и уголъ A=∠G.

§ 42. *Опредѣл. Параллельныя* или *равно отстоящія* линѣи AB и CD суть тѣ, кои будучи продолжены въ обѣ стороны, никогда сойтиться не могутъ; или *параллельныя линѣи* суть тѣ, между коими перпендикулярныя ли-

нѣи EF и GH къ параллельнымъ AB и CD суть равны. *Фиг.* 38.

§ 43. ТЕОРЕМА. *Ежели двѣ параллельныя линѣи* AB *и* CD *пересѣкутся третіею* EF, *то углы* AGH *и* GHD *на крестъ будутъ равны между собою.* Фиг. 39.

Доказ. Изъ точки G, на линѣю CD, а изъ точки H на линѣю AB опусти перпендикуляры GI и HK (§ 39), кои означая разстояніе параллельныхъ линѣй AB и CD, будутъ равны между собою (§ 40, *Слѣд.*); а въ разсужденіи сего будетъ треугольникъ GHI=△GHK; ибо уголъ I=K прямые, GI=HK доказано, бокъ GH обоимъ треугольникамъ общій, слѣдовательно и уголъ GHD=∠AGF (§ 41).

Слѣдств. I. Когда двѣ параллельныя линѣи AB и CD, пересѣчены будутъ третіею EF, то въ одну сторону лежащіе углы EGB и GHD будутъ равны между собою. Ибо по предыдущей теоремѣ уголъ AGF=GHD, но уголъ AGH=EGB (§ 21); по сему уголъ EGB=GHD (*Ариѳм.* § 20). Также докажется, что и уголъ BGF=DHF, поелику каждой изъ нихъ есть дополненіе равныхъ угловъ AGF и GHD до 180° (§ 19. *Слѣд.*).

Слѣдств. II. Сумма угловъ BGH+DHG, заключающихся внутри параллельныхъ линѣй, равна двумъ прямымъ угламъ или 180°; ибо уголъ AGH съ угломъ BGH=180 град. (§ 17); но уголъ AGH=DHG (§ 43); слѣдовательно BGH+DHG=180 град. или двумъ прямымъ угламъ.

Слѣдств. III. Ежели двѣ параллельныя линѣи AB и CD пересѣкутся линѣею EF, то углы EGB и CHF будутъ равны между собою; потому что углы EGB и GHD по первому слѣд-

ствію равны между собою, но уголъ GHD=CHF (§ 21); слѣдовательно уголъ EGB=∠CHF.

§ 44. ТЕОРЕМА. *Ежели двѣ линѣи* AB *и* CD *пересѣкутся третіею* EF, *такъ что уголъ* AGH *будетъ равенъ углу* GHD, *то оныя линѣи будутъ параллельны.* Фиг. 39.

Доказ. Изъ точки G, на линѣю CD, опустя перпендикуляръ GI, положи отъ G до K линѣю GK=HI и проведи HK, то будетъ треугольникъ KGH=△IGH; потому что бокъ GH обоимъ треугольникамъ общій, KG=HI и уголъ KGH=∠GHI по положенію; по сему уголъ GKH=GIH прямые, и KH=GI (§ 26); но поелику равныя KH и GI суть перпендикулярны къ AB и CD; по сему линѣи AB и CD находятся въ равномъ разстояніи, и слѣдовательно параллельны между собою (§ 42).

Слѣдств. I. Ежели двѣ линѣи AB и CD пересѣчены будутъ третіею EF такъ, что углы EGB и GHD, въ одну сторону положеніе свое имѣющіе будутъ равны, то такія линѣи будутъ параллельны; ибо уголъ EGB=AGF (§ 21); но ∠EGB=∠GHD по положенію; по сему ∠GHD=AGH (*Ариѳм.* § 20); слѣдовательно линѣи AB и CD параллельны (§ 44).

Слѣдств. II. Линѣи AB и CD будутъ параллельны, ежели третья линѣя EF пересѣкаетъ оныя такъ, что сумма внутреннихъ угловъ BGH+GHD будетъ равна двумъ прямымъ угламъ или =180°; ибо уголъ AGH+BGH=180° (§ 17); также ∠BGH+GHD=180 град. по положенію; по сему ∠AGH+BGH=BGH+GHD (*Ариѳм.* § 20); а отнявъ отъ равныхъ количествъ уголъ BGH, останется уголъ

AGH=GHD (*Ариѳм.* § 32), слѣдовательно линѣи AB и CD параллельны между собою (§ 44).

§ 45. ТЕОРЕМА. *Ежели двѣ параллельныя линѣи AB и CD пересѣкутся двумя параллельнымижъ EF и HG, то противулежащія стороны KI, NL, также KL и NI будутъ равны между собою.* Фиг. 40.

Доказ. Проведя линѣю IL, будетъ въ треугольникахъ INL и IKL уголъ LIN=KLI и ∠NLI=LIK (§ 43), и притомъ бокъ IL обоимъ треугольникамъ общій; по сему треугольникъ INL=IKL (§ 27); слѣдовательно и линѣи IK=NL, KL=NI.

§ 46. ЗАДАЧА. *Изъ точки C, провесть линѣю CD параллельно данной линѣи AB.* Фиг. 41.

Рѣшен. Изъ точки C проведи произвольно линѣю CE, которая бы пересѣкла линѣю AB въ точкѣ E; сдѣлай уголъ ECD равенъ CEB (§ 34); то проведенная чрезъ точку *n* линѣя CnD, будетъ параллельна къ линѣи AB (§ 44).

Прибавл. Дабы не всегда подвергаться сему правилу въ проведеніи параллельныхъ линѣй на бумагѣ, то для сего хотя и употребляются различнаго рода металлическія, костяныя и деревянныя параллельныя линѣйки; однакожъ по большей части, на бумагѣ или другой какой нибудь поверхности, параллельныя линѣи проводятся помощію деревяннаго прямоугольнаго треугольника *den* и простой линѣйки PG (*фиг.* 42). *На прим.* чтобы изъ точки C провесть линѣю параллельно къ данной линѣи AB, то приложа треугольникъ *den* какимъ нибудь бокомъ; *на прим.* *de* къ линѣйкѣ PG, приведи ихъ въ такое положеніе, что-

бы бокъ *de* треугольника находился на данной линѣи AB; потомъ прижавъ линѣйку PG къ бумагѣ плотно, передвинь по ней треугольникъ бокомъ *dn*, такъ чтобы другой его бокъ *de* находился у данной точки C; наконецъ подлѣ сего бока проведи черту CH, то оная будетъ параллельна къ AB. Ибо одного и того же треугольника *end* уголъ Bdn=∠Hdn; слѣдовательно линѣя *d*CH параллельна къ AB (§ 44. *Слѣд.* 1).

§ 47. ЗАДАЧА. *Данную линѣю* AB *раздѣлить на столько равныхъ частей, на сколько потребно.* Фиг. 43.

Рѣшен. Положимъ, что должно данную AB раздѣлить на пять равныхъ частей; то для сего изъ точки A подъ какимъ нибудь угломъ проведи линѣю AC, на которой начиная отъ A положи произвольной величины пять равныхъ частей A*a*, *ab* и проч.; потомъ конецъ B данной линѣи AB и послѣднюю точку D линѣи AC, соедини прямою линѣею BD; напослѣдокъ изъ замѣченныхъ точекъ *a*, *b*, *c* и *d* проведи *al*, *bm* и проч. параллельно къ BD, то данная линѣя AB раздѣлится на пять равныхъ частей.

Доказ. Изъ точекъ *a*, *b*, *c* и *d*, проведя линѣи *ak*, *bi*, *ch* и *dq* параллельно къ AB (§ 46), то будутъ треугольники A*al*, *abk*, *bci* и проч. равны между собою. Ибо A*a*=*ab*=*bc* и проч. по положенію, уголъ *a*A*l*=*bak*=*cbi* и проч.; также уголъ A*al*=*abk*=*bci* и пр. (§ 43. *Слѣд.* 1); а потому треугольники A*al*, *bak*, *cbi* и проч. суть равны между собою (§ 27), и слѣдовательно A*l*=*ak*=*bi* и проч.; но какъ *ak* параллельна *lm*, *al* параллельна *km*, также *bi* па-

раллельна *mn*, *bm* параллельна *in* и проч., по сему $ak=lm$ и $bi=mn$ и проч. (§ 45); но поелику $Al=ak=bi$ и проч., то будетъ $Al=lm=mn$ и проч.; слѣдовательно AB раздѣлена на пять равныхъ частей.

Слѣдств. Изъ сего видно, когда бокъ AD, какого нибудь треугольника ABD, раздѣлится на нѣсколько равныхъ частей *Aa*, *ab*, *bc* и пр., и изъ точекъ *a*, *b*, *c* и проч. проведутся линѣи параллельно къ основанію AB, то также докажется, что и бокъ BD тѣми линѣями раздѣлится на столькожъ между собою равныхъ частей, на сколько частей раздѣленъ бокъ AD.

§ 48. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ треугольникѣ* ABC *сумма всѣхъ трехъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ или* 180 *градусамъ.* (Фиг. 44.

Доказ. Изъ точки C протяни линѣю CE параллельно къ боку AB (§ 46), то будетъ уголъ ECD равенъ углу BAC (§ 44. *Слѣд.* 1), и уголъ ECB=углу ABC (§ 44.); по сему уголъ $BCD=\angle CAB+\angle ABC$; а придавъ къ нимъ уголъ ACB, будетъ уголъ $BCD+ACB=CAB+ABC+ACB$ (*Ариѳм.* § 27); но $\angle BCD+\angle ACB=$ двумъ прямымъ угламъ или 180 град. (§ 17); слѣдовательно сумма внутреннихъ угловъ $CAB+ABC+ACB$ равна двумъ прямымъ угламъ или 180 градусамъ (*Ариѳм.* § 20).

Слѣдств. I. Изъ сего удобно можно видѣть что во всякомъ треугольникѣ ABC, наружной уголъ BCD равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ угловъ $CAB+ABC$, и больше каждаго изъ оныхъ.

Слѣдств. II. Ежели два угла ABC и BCA треугольника ABC будутъ извѣстны, то третій

онаго уголъ ВАС сыщется, когда сумма двухъ извѣстныхъ угловъ изъ 180 град. вычтется.

Слѣдств. III. Когда два угла одного треугольника будутъ равны двумъ угламъ другаго треугольника, то и третій третьему непремѣнно равенъ; также ежели уголъ одного треугольника равенъ какому нибудь углу другаго треугольника, то и сумма двухъ угловъ перваго равна суммѣ двухъ угловъ втораго треугольника.

Слѣдств. IV. Когда въ треугольникѣ одинъ уголъ прямой, то сумма прочихъ угловъ равна прямомужъ или 90 град. И такъ когда въ треугольникѣ будетъ одинъ уголъ прямой или тупой, то каждой изъ прочихъ будетъ острой, поелику каждой изъ нихъ меньше прямаго; слѣдовательно во всякомъ треугольникѣ болѣе одного прямаго или тупаго угла быть не можетъ. Изъ сего видно, что въ равнобедренномъ прямоугольномъ треугольникѣ острые углы суть по 45 град. (§ 28). Въ равностороннемъ треугольникѣ каждой уголъ $=60$ град. $=\frac{180}{3}=\frac{2}{3}$ прямаго угла (§ 28).

§ 49. ЗАДАЧА. *По одному основанію* DE *и двумъ угламъ x и z, коихъ сумма меньше двухъ прямыхъ угловъ, начертить треугольникъ.* (Фиг. 45.

Рѣшен. и *Доказ.* Проведя линѣю AB равну данной ED, сдѣлай у точки A уголъ $BAC=x$, а у точки B уголъ $ABC=z$ (§ 34), коихъ продолженные бока взаимно пересѣкшись въ точкѣ C, составятъ требуемой треугольникъ ABC.

§ 50. ЗАДАЧА. *На концѣ* B *линѣи* AB, *поставить перпендикуляръ* DB. (Фиг. 46.

Рѣшен. На произвольно взятой отъ точки B линѣѣ BC, начерти равносторонной треугольникъ BCE (§ 31); потомъ на продолженной CE положи FG=EB; напослѣдокъ изъ B чрезъ точку G проведи BD, то оная будетъ желаемой перпендикуляръ.

Доказ. Поелику уголъ CEB=CBE (§ 28); также уголъ CEB=EBG+EGB (§ 28. *Слѣд.* 1), уголъ же EGB=EBG (§ 28); по сему уголъ EBG=$\frac{1}{2}$∠CEB=$\frac{1}{2}$∠CBE, но уголъ CBE=60 град. (§ 48. *Слѣд.* 4); по сей причинѣ уголъ EBG=30 град., и для того уголъ CBE+EBG=∠ABD =90 град. (*Ариѳм.* § 27); слѣдовательно BD перпендикулярна къ AB (§ 24).

Прибавл. Для проведенія перпендикулярной линѣи BA, къ данной линѣи CD (*фиг.* 47), посредствомъ прямоугольнаго деревяннаго треугольника *abc* и обыкновенной линѣйки IK, надлежитъ приложить треугольникъ *abc* къ линѣйкѣ IK, однимъ бокомъ *ac* изъ составляющихъ прямой уголъ *acb*, и вмѣстѣ съ нею придвинуть къ данной линѣи CD, такъ чтобы діогональ *ab* треугольника *abc* находилась на данной линѣи CD; потомъ придержавъ рукою линѣйку IK, переложи треугольникъ *abc* такимъ образомъ, чтобы бокъ его *bc* былъ на линѣйкѣ IK, а діогональ *ab* была бы у данной точки B; тогда подлѣ діогонали *ab*, проведенная линѣя BA будетъ перпендикулярна къ CD; ибо въ треугольникахъ *abc* и B*ab* уголъ B*ab* есть общій, уголъ B*ba*=∠*abc* одного и того же треугольника *abc*, и для того будетъ уголъ B*ab*+∠B*ba*=∠*bac*+∠*abc*=90 град.; по сему

уголъ *aBb*=∠ABD=90 град. (§ 48 *Слѣд.* 2); и слѣдовательно линѣя AB, проведенная подлѣ діогонали *ab* треугольника *abc* перпендикулярна къ данной линѣи CD (§ 24).

§ 51. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ треугольникѣ* ABC, *когда уголъ* B *равенъ углу* A, *то бокъ* AC *будетъ равенъ боку* BC. Фиг. 48.

Доказ. Изъ точки C на основаніи AB опусти перпендикуляръ CD (§ 39), то будетъ треугольникъ ACD=△BCD; ибо уголъ CDA= углу CDB прямые, и уголъ A=B по положенію; по сему уголъ ACD=BCD (§ 48. *Слѣд.* 3), и бокъ DC обоимъ треугольникамъ общій, слѣдовательно △ADC=BDC и бокъ AC=BC (§ 27).

§ 52. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ треугольникѣ* ABC, *когда уголъ* ABC *больше угла* C, *то и бокъ* AC *будетъ больше бока* AB. Фиг. 49.

Доказ. У точки B сдѣлай уголъ CBD= углу C (§ 34); то будетъ бокъ BD=CD (§ 51); но AD+DB>AB (§ 30); слѣдовательно AD+CD=AC>AB (*Ариѳм.* § 22).

§ 53. ТЕОРЕМА. *Въ треугольникѣ* ABC, *когда бокъ* AB *больше бока* AC, *то и уголъ* ACB *будетъ больше угла* ABC. Фиг. 50.

Доказ. На основаніи AB, положивъ линѣю AD равну меньшему боку AC, будетъ уголъ ACD =ADC (§ 28); но поелику уголъ ADC или ACD больше угла ABC (§ 48. *Слѣд.* 1), то къ углу ACD придавъ уголъ BCD, будетъ уголъ ACD+DCB=ACB еще и больше ∠ABC (*Ариѳм.* § 27).

§ 54. ЗАДАЧА. *По данной высотѣ* AB, *основанію* AC *и углу* z, *начертить треугольникъ.* Фиг. 51.

Рѣшен. и *Доказ.* Взявъ линѣю AC за основаніе (*фиг.* 51), у точки A сдѣлай уголъ CAD

=z (§ 35). Изъ точки A поставь перпендикуляръ AB равенъ данной высотѣ AB (§ 50); потомъ изъ точки B проведи линѣю BD параллельно къ основанію AC (§ 46), которая пересѣчетъ бокъ угла CAD въ точкѣ D; напослѣдокъ соединя точки D и C прямою линѣею CD, получишь требуемой треугольникъ ADC, коего высота DE=данной AB (§ 42).

§ 55. ТЕОРЕМА. *Когда два бока AC и BC одного треугольника ABC, равны двумъ бокамъ DF и EF другаго треугольника DEF, и углы A и D противулежащіе равнымъ бокамъ BC и EF равны; при томъ же углы ABC и DEF будутъ острые или тупые, то такіе треугольники будутъ во всѣхъ частяхъ равны.*

Доказ. Положимъ, что углы B и E острые (*фиг.* 52). Изъ верховъ C и F опустя перпендикуляры CG и FH къ AB и GE (§ 39); треугольникъ AGC будетъ=DFH; ибо бокъ AC= DF, уголъ A=D по положенію, уголъ AGC= DHF прямые; чего ради уголъ ACG=DFH (§ 48. *Слѣд.* 3), по сему и AG=DH, CG=FH (§ 27); также треугольникъ BGC=EHF, потому что уголъ BGC=EHF прямые, GC=HF доказано, и CB=EF по положенію; по сему BC =HE (§ 41); и такъ AG+BG=AB=DH+HE =DE (*Ариѳм.* § 27); слѣдовательно треугольникъ ACB=DEF (§ 26 и 29).

Въ другомъ случаѣ. Когда углы ABC и DEF тупые и бокъ CB=EF (*фиг.* 53). Изъ верховъ C и F на продолженныя основанія AB и DE опусти перпендикуляры CG и FH (§ 39). Треугольникъ ACG будетъ=DFH, и CG=FH докажется какъ и въ первомъ случаѣ; тожъ докажется и въ прямоугольныхъ треугольни-

кахъ CBG и FEH, что BC=HE (§ 41); наконецъ AG-GB=AB=DH-HE=DE (*Ариѳм.* § 32); слѣдовательно треугольникъ ACB= треугольнику DFE (§ 26 и 29).

Примѣч. Надлежитъ замѣтить: есть ли для начертанія треугольника даны будутъ два бока и острой уголъ, и притомъ не сказано будетъ, что противулежащіе углы B и E равнымъ бокамъ AC и DE, должны быть острые или тупые, то въ такомъ случаѣ начертиться можетъ два треугольника: или остроугольной, или тупоугольной.

§ 56. ТЕОРЕМА. *Въ двухъ треугольникахъ* ABC *и* ABD, *имѣющихъ одно основаніе* AB, *сумма двухъ боковъ* AC+BC *одного треугольника, больше суммы боковъ* AD+BD *другаго.* Фиг. 54.

Доказ. Продолжа бокъ AD до пересѣченія съ бокомъ BC въ точкѣ E, будетъ AC+CE>AE или >AD+DE; также и BE+DE>DB (§ 30); а придавъ сіи величины къ первымъ, будетъ AC+CE+BE+DE>AD+DB+DE (*Ариѳм.* § 28); наконецъ отнявъ отъ обѣихъ количествъ величину DE, останется AC+CE+BE>AD+DB (*Ариѳм.* § 32), то есть AC+BC>AD+DB.

§ 57. ТЕОРЕМА. *Когда два бока* AB *и* BC *треугольника* ABC, *равны двумъ бокамъ* DE *и* EF *другаго треугольника* DEF, *и между равными боками уголъ* B *перваго больше угла* E *втораго, то основаніе* AC *перваго будетъ больше основанія* DE *втораго.* Фиг. 55.

Доказ. На боку AB (N° 1) сдѣлай уголъ ABG= DEF. Положи BG=EF или BC, проведи линѣи CG и AG, которая будетъ=DF (§ 26). При чемъ произойдетъ равнобедренный треугольникъ GBC; ибо BG=EF=BC по положе-

нію; чего ради уголъ BCG=BGC (§ 28). Къ углу BGC придай уголъ ACB, будетъ ∠BGC+AGB=AGC>BCG; по отнятіи отъ послѣдняго угла ACB, останется уголъ AGC больше ACG, по сему AC>AG (§ 52), слѣдовательно и больше DF.

Но естьли точка G упадетъ внутрь треугольника ABC (N° 2), то будетъ AB+BC>AG+BG (§ 56), а по отнятіи равныхъ количествъ BC и BG, останется AC>AG и больше DE (*Ариѳм.* § 32).

О свойствѣ линѣй и о мѣрѣ угловъ относительныхъ къ кругу.

§ 58. ТЕОРЕМА. *Ежели въ кругѣ хорды AB и ED равны, то и стягивающіяся ими дуги AyB и ExD будутъ равны.* Фиг. 56.

Доказ. Проведя радіусы CA, CB, CD и CE, будетъ треугольникъ ACB=△ECD; ибо AC=CE, BC=CD радіусы одного круга, и AB=DE по положенію; но такіе треугольники по § 29 во всѣхъ частяхъ совершенно равны, по сему и уголъ ACB=∠DCE; а потому и мѣры ихъ равны, то есть дуга AyB=DxE.

Слѣдств. И обратно, когда дуги AyB и DxE одного круга равны, то и стягивающія ихъ хорды AB и DE будутъ равны, потому что AC=CE, BC=CD радіусы; и уголъ ACB=∠DCE измѣряются равными дугами AyB и DxE по положенію; а такіе треугольники по § 26 му суть равны, слѣдовательно и хорда AB=DE.

§ 59. ТЕОРЕМА. *Когда изъ средины C хорды AB, проведется линѣя ECD перпендикулярно*

къ хордѣ AB, *то оная пройдетъ чрезъ центръ круга.* Фиг. 57.

Доказ. Проведя хорды AD и BD, AE и BE, будетъ треугольникъ ACD=△DCB, потому что AC=BC по положенію, DC общій бокъ и уголъ ACD=∠BCD прямые; по сему хорда AD =DB (§ 26), и слѣдовательно дуга AxD=ByD (§ 58). Такимъ же образомъ докажется, что дуга AE равна дугѣ BE; а потому дуга DxA+AE=DyB+BE (*Ариѳм.* § 27), и каждая равна половинѣ окружности круга; слѣдов. ED есть діаметръ проходящій чрезъ центръ круга.

Прибавл. I. Изъ сего удобно разумѣть можно, что изъ средины C хорды AB, чрезъ центръ F проведенная линѣя CD, будетъ перпендикулярна къ хордѣ AB; ибо проведя радіусы AF и BF, будетъ треугольникъ AFC=△BCF, потому что AF=BF радіусы, AC=BC по положенію и CF общій бокъ, по сему уголъ ACF=BCF (§ 29); слѣдовательно CD перпендикулярна къ хордѣ AB.

Прибавл. II. Изъ того же явствуетъ, что изъ центра F, на хорду AB, опущенный перпендикуляръ FE, какъ хорду AB, такъ и дугу AEB раздѣляетъ на двѣ равныя части; ибо тогда будетъ треугольникъ AFC=△BCF, потому что AF=BF радіусы, FC общій бокъ и ∠ACF=∠BCF прямые (§ 41), по сему AC=BC, и уголъ AFC=∠BFC, слѣдовательно и измѣряющія ихъ дуги AE и BE суть равны между собою.

Прибавл. III. Изъ сего видно, что посредствомъ сего правила, всякая дуга круга на 2, на 4, на 8 и болѣе равныхъ частей удобно

раздѣлена быть можетъ; ибо когда изъ центра F, на хорду AE, опустится перпендикуляръ, то онъ дугу AE раздѣлитъ на двѣ равныя части, и чрезъ то дуга AEB раздѣлится на 4 равныя части, и такъ далѣе.

§ 60. ЗАДАЧА. *Въ данномъ кругѣ* ADBE *найти центръ.* (Фиг. 57.

Рѣшен. Проведя въ кругѣ произвольную хорду AB, раздѣли оную на двѣ равныя части въ точкѣ C (§ 37); чрезъ точку C проведи перпендикулярную линѣю ED, соединяющуюся концами съ окружностію круга въ точкахъ D и E, то оная будетъ діаметръ круга; потомъ раздѣля оной на двѣ равныя части въ точкѣ F, получится требуемой центръ. Истинна сего рѣшенія видна изъ предыдущей теоремы.

§ 61. ТЕОРЕМА. *Хорды* AB *и* DE *равно отстоящія отъ центра круга* ABDE, *суть равны между собою.* (Фиг. 56.

Доказ Изъ центра C на хорды AB и DE опустя перпендикуляры C*n* и C*m*, и проведя CB и CD, будетъ $Cn = Cm$ по положенію (§ 40. *Слѣд*), $CB = CD$ радіусы, и уголъ $CnB = \angle CmD$ прямые, по сему полхорды $nB = mD$ (§ 41); слѣдов. и цѣлая хорда $AB = DE$ (*Арием.* § 19).

§ 62. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ кругѣ* ABFE, *діаметръ* AB *больше всякой хорды* CD, EF *и проч.* (Фиг. 58.

Доказ. Ибо проведя радіусы PC и PD, PE и PF, будетъ въ треугольникахъ CPD и EPF бока, CP, PD, EP, FP суть радіусы и равны между собою; по сему діаметръ $AB = PC + PD$; но $PC + PD > CD$ (§ 30); слѣдовательно и діа-

метрЪ AB больше хорды CD; также докажется, что дiаметрЪ AB больше хорды EF.

Прибавл. Ближайшая кЪ центру хорда болѣе тѣхЪ, кои далѣе отЪ онаго; ибо вЪ треугольникахЪ CPD и EPF, бока PC и PD, EP и PF суть равны, а уголЪ CPD перваго больше угла EPF втораго треугольника; слѣдовательно по § 57 и хорда CD больше EF.

§ 63. ТЕОРЕМА. *Ежели изъ точки A взятой внутри круга EFD, проведутся до окружности линѣи AC, AD, AE и проч., то самая большая изъ нихъ будетъ линѣя AC, проходящая чрезъ центръ B; и ближайшая къ центру будетъ болѣе каждой изъ тѣхъ, кои далѣе отъ онаго.* (Фиг. 59.

Доказ Проведя радiусы BD и BE, будетЪ AB+BD больше AD; также AB+BE>AE; но поелику BC=BD=BE радiусы, то будетЪ AB+BC=AB+BD=AB+BE=AC; по сему проходящая чрезЪ центрЪ B линѣя AC>AD и больше AE (*Аксiом.* § 29). ВЪ треугольникахЪ ABD и ABE имѣющихЪ равные бока AB и BD, AB и BE, уголЪ ABD перваго, больше угла ABE втораго треугольника; а вЪ такихЪ треугольникахЪ по § 57 будетЪ бокЪ AD перваго больше бока AE втораго; слѣдов ближайшая кЪ центру болѣе той линѣи, которая далѣе отЪ онаго.

Прибавл ИзЪ сего удобно разумѣть можно, что по обѣ стороны, чрезЪ центрЪ B ходящей линѣи AC, болѣе двухЪ равныхЪ линѣй провести не можно; слѣдовательно, ежели изЪ точки взятой внутри круга проведутся кЪ окружности три равныя линѣи, то оныя будутЪ радiусы, и точка A будетЪ центрЪ круга.

§ 64. ЗАДАЧА. *Чрезъ три данныя точки А, В и С, лежащія не въ прямой линѣи, или около даннаго треугольника АВС описать кругъ.* Фиг. 60.

Рѣшен. Данныя точки А, С, В соедини прямыми линѣями ВС и АС; потомъ раздѣля каждую на двѣ равныя части въ точкахъ D и Е, проведи изъ нихъ DH и EH перпендикулярно къ проведеннымъ СВ и АС; потомъ изъ точки Н взаимнаго пересѣченія перпендикулярныхъ линѣй, радіусомъ НА или ВН опиши кругъ, котораго окружность пройдетъ чрезъ три данныя точки А, В, С.

Доказ. Проведя линѣи НС, НВ и НА, будетъ треугольникъ BDH=CDH; ибо уголъ HDB равенъ HDC прямые, DB=CD, и HD общій бокъ, по сему BH=CH (§ 26); подобнымъ образомъ докажется, что и CH=AH; слѣдоватеьно CH =AH=BH суть радіусы круга изъ центра Н описаннаго, коего окружность прошла чрезъ данныя точки А, В и С.

§ 65. ЗАДАЧА. *Данной дуги АСВ, найти центръ.* Фиг. 60.

Рѣшен. Проведи произвольно двѣ хорды АС и ВС, и раздѣля каждую на двѣ равныя части въ точкахъ Е и D, проведи къ нимъ перпендикулярныя линѣи EH и DH, отъ взаимнаго сѣченія коихъ точка Н будетъ искомой центръ. Истинна сего рѣшенія докажется также, какъ и въ предыдущей задачѣ.

§ 66. *Опредѣл. Тангенсъ или касательная* линѣя СЕ есть та, которая касается окружности круга, не прорѣзывая онаго (*фиг.* 61).

§ 67. ТЕОРЕМА. *Когда на концѣ радіуса* АВ *поставится перпендикуляръ* ВС, *то оной коснется круга только въ одной точкѣ* В. Фиг. 61.

Доказ. Поелику радіусъ AB есть перпендикуляръ къ BC, и потому короче всѣхъ другихъ линѣй AD изъ центра A до линѣи BC проведенныхъ (§ 40); по сему всякая точка D, далѣе отъ центра, нежели точка B; а потому и всѣ точки D, кромѣ одной B находятся внѣ круга; слѣдовательно линѣя BC касается окружности круга только въ одной точкѣ B.

Слѣдств. Изъ сего удобно видѣть можно, что ежели изъ центра A, въ касательную точку B проведется линѣя AB, то оная будетъ перпендикулярна къ касательной BC. Ибо по предыдущей теоремѣ, линѣя BC касается окружности круга только въ одной точкѣ B; слѣдовательно всякая точка D, изъ составляющихъ линѣю BC, находится внѣ круга, и потому изъ центра A къ сей точкѣ D, всякая проведенная линѣя AD, будетъ болѣе радіуса AB; по сему AB короче всякой линѣи AD, слѣдовательно линѣя AB перпендикулярна къ касательной BC (§ 40).

§ 68. ТЕОРЕМА. *Когда на продолженномъ радіусѣ AE, возмется произвольная линѣя EB за радіусъ и опишется кругъ, то оной коснется перваго въ одной точкѣ E.* (Фиг. 62.

Доказ. Ежели на концѣ радіуса AE поставится перпендикуляръ CE, то оной коснется круга EF въ одной точкѣ E (§ 68); но какъ радіусы AE и BE концами своими соединились въ одной точкѣ E; по сему линѣя EC будучи перпендикулярна къ другому радіусу BE, касается и другаго круга въ той же точкѣ E; слѣдовательно оные круги касаются между собою только въ одной точкѣ E.

Слѣдств. Изъ сего видно, когда два круга касаются между собою, то изъ центровъ ихъ А и В, проведенные въ касательную точку Е радіусы АЕ и ВЕ, составятъ одну прямую линѣю АВ; ибо ежели чрезъ общую точку Е проведется касательная CD, то оная къ обѣимъ радіусамъ АЕ и ВЕ будетъ перпендикулярна (§ 67. *Слѣд.*); по сему уголъ AEC=BEC прямые; слѣдовательно АВ есть прямая линѣя (§ 17).

§ 69. ТЕОРЕМА. *Когда частію BD радіуса AD, взятою внутри круга, опишется одинъ кругъ, то оной коснется перваго въ одной точкѣ* D. Фиг. 63.

Доказ. Ибо проведя линѣи AC и BC, будетъ $AB+BC>AC$ (§ 20); но $AC=AB+BD$ радіусы, по сему $AB+BC>AB+BD$; а отнявъ отъ обѣихъ величинъ линѣю AB, останется $BC>BD$; слѣдовательно точка C далѣе лежитъ отъ центра B, нежели точка D, того ради всѣ точки окружности круга CDE, кромѣ одной D находятся внѣ круга DC, слѣдовательно окружность онаго касается окружности круга EDC только въ одной точкѣ D.

§ 70 ТЕОРЕМА. *Между параллельными хордами* CD *и* EF, *дуги* CE *и* FD *равны между собою.* Фиг. 58.

Доказ Изъ центра P проведя радіусы PD, PC, PF и PE, будетъ уголъ $APC=\angle PCD$, и уголъ $BPD=\angle PDC$ (§ 43); но поелику въ треугольникѣ CPD, уголъ $PCD=\angle PDC$ (§ 28); по сему и уголъ $APC=\angle BPD$; а потому и измѣряющія ихъ дуги AC и BD суть равны между собою. Также докажется, что и дуга $ACE=BDF$; а когда отъ каждой изъ сихъ равныхъ

дугѣ отнимутся равныя дуги AC и BD, то останется дуга CE=дугѣ DF.

Прибавл. Изъ сего видно, что между касательною HK и всякою параллельною къ ней хордою EF, дуги EI и FI будутъ равны; ибо проведя изъ центра P въ точку касательную радіусъ PI, будетъ уголъ PIK прямой (§ 67. *Слѣд.*); также и уголъ IPA=IPB прямые (§ 53. *Слѣд.* 2); по сему дуга AEI=BFI; а когда отъ сихъ равныхъ дугъ отнимутся равныя дуги AE и BF, то останется дуга EI=дугѣ FI.

§ 71. ТЕОРЕМА. *Уголъ* BAD, *коего верхъ* A *на окружности круга измѣряется половиною дуги* BFD, *содержащейся между его боками, то есть половиною числа градусовъ, минутъ и проч. дуги* BFD.

Доказ Положимъ: 1) что одинъ бокъ угла есть діаметръ AD (*фиг.* 64), то проведя чрезъ центръ C линѣю HF параллельно къ боку AB, углы BAD и FCD будутъ равны (§ 43. *Слѣд.* 1); но поелику противуположенные углы FCD и ACH (коихъ верхи въ центрѣ C) суть равны (§ 21), а потому измѣряющія ихъ дуги FD и AH одного круга суть равны между собою (§ 14); дуга же AH=дугѣ BF (§ 70); по сему дуга FD=дугѣ BF = половинѣ дуги FBD; слѣдовательно уголъ FCD или BAD измѣряется дугою FD или BF, то есть половиною дуги BFD, содержащейся между боками угла BAD.

2) Когда одинъ бокъ AB угла BAF будутъ находиться по одну, а другой бокъ AE по другую сторону центра C (*фиг.* 65); то изъ верха A проведя діаметръ AD, уголъ BAF раздѣлится на двѣ части BAD и DAF; но

поелику по первому случаю докажется, что мѣра угла BAD $=\frac{1}{2}$ дуги BD, а мѣра угла DAF $=\frac{1}{2}$ дуги DF; слѣдовательно мѣра сихъ двухъ угловъ, то есть мѣра угла BAF $=\frac{1}{2}$ дуги BD $+\frac{1}{2}$DF $=\frac{1}{2}$ дуги BDF.

3) Естьли оба бока AF и AG угла FAG, будутъ находиться по одну сторону центра C; то проведя діаметръ AD, по первому случаю докажется, что уголъ DAG измѣряется половиною дуги DFG или $\frac{1}{2}$DF $+\frac{1}{2}$FG; но уголъ FAD измѣряется половиною дуги DF, слѣдовательно для мѣры угла FAG останется половина дуги FG (*Ариѳм.* § 32).

Слѣдств. I. Изъ того видно, что углы A и B (*фиг.* 66), коихъ верхи на окружности, стоящіе на одной дугѣ DF суть равны между собою, потому что каждый изъ нихъ измѣряется половиною дуги DF; и каждой изъ таковыхъ угловъ равенъ половинѣ угла DCF, стоящаго на той же дугѣ DF, коего верхъ въ центрѣ C; ибо сей уголъ измѣряется цѣлою дугою DF.

Слѣдств. II. Углы BAD и BHD (*фиг.* 67), коихъ верхи при окружности, стоящіе на діаметрѣ BD суть прямые; ибо каждой изъ нихъ измѣряется половиною полуокружности круга, содержащею въ себѣ 90 град.

Слѣдств. III. Уголъ FAD, стоящій на дугѣ FD, которая менѣе половины окружности круга, есть острой; и уголъ BAG, стоящій на дугѣ BFG, которая болѣе половины окружности, есть тупой, потому что половина сей дуги болѣе 90 град.

§ 72. ТЕОРЕМА. *Уголъ* BAG *изъ касательной* AG *и хорды* AB, *измѣряется половиною дуги* AB. (Фиг. 68.

Доказ. Поелику линѣя DA, чрезъ центръ C въ касательную точку A проведенная перпендикулярна къ касательной AG (§ 67. *Слѣд.*), по сему уголъ GAD есть прямой; слѣдовательно оной измѣряется половиною полуокружности ABD, или $\frac{1}{2}$ю дуги AB+$\frac{1}{2}$BD; но уголъ BAD измѣряется $\frac{1}{2}$ю дуги BD (§ 71); слѣдовательно для измѣренія угла BAG остается половина дуги AB.

§ 73. ТЕОРЕМА. *Уголъ* BAD, *коего верхъ* A *внутри круга, измѣряется половиною дуги* BD *съ половиною дуги* FG, *находящейся между продолженными его боками.* (Фиг. 69.

Доказ. Ибо проведя линѣю GH параллельно къ FD, будетъ уголъ BAD=BGH (§ 43. *Слѣд.* 1), и мѣра угла BGH есть половина дуги BDH=$\frac{1}{2}$BD+$\frac{1}{2}$DH (§ 71); но дуга DH=дугѣ FG (§ 70); слѣдовательно уголъ BAD измѣряется $\frac{1}{2}$ю дуги BD+$\frac{1}{2}$FG.

§ 74. *Опредѣл.* *Секансъ или сѣкущая линѣя* PG есть та, которая проведена будучи изъ точки P, лежащей внѣ круга, разрѣзываетъ оной на двѣ какія нибудь части. Часть PA секанса PG называется *наружною частію* секанса; а внутри круга находящаяся часть AG именуется *внутреннею частію секанса.* Фиг. 64.

§ 75. ТЕОРЕМА. *Уголъ* PAB, *изъ наружной части* PA *секанса* PG *и хорды* AB, *измѣряется половиною суммы двухъ дугъ* AB *и* AG, *или половиною дуги* BAG. (Фиг. 65.

Доказ. Ибо смежные углы PAB и BAG вообще равны двумъ прямымъ угламъ или 180°

(§ 17); по сему сумма угловъ PAB+BAG измѣряется половиною цѣлой окружности круга, то есть $\frac{1}{2}$ю дуги BDG+$\frac{1}{2}$BAG; но уголъ B G измѣряется $\frac{1}{2}$ю дуги BDG (§ 71); слѣдовательно для мѣры угла PAB остается половина дуги BAG или $\frac{1}{2}$AB+$\frac{1}{2}$AG.

§ 76 ТЕОРЕМА. *Уголъ DBA, коего верхъ A внѣ круга, измѣряется половиною дуги BD безъ половины дуги GF.* Фиг 70.

Доказ. Проведя линѣю GX параллельно къ DA, будетъ уголъ DAB=XGB (§ 43. *Слѣд.* 1); но мѣра угла XGB равна $\frac{1}{2}$ дуги BX, дуга же XB=дугѣ DB-DX; а дуга DX=GF (§ 70), то будетъ дуга XB=дугѣ DB-GF, по сему $\frac{1}{2}$ дуги XB=$\frac{1}{2}$ дуги DB $\frac{1}{2}$GF; слѣдовательно за мѣру угла XGB, или DAB, вмѣсто $\frac{1}{2}$ дуги XB можно принять $\frac{1}{2}$DB-$\frac{1}{2}$GF (*Ариѳм.* § 42).

Примѣч. Ежели одинъ бокъ AP угла BAP будетъ касательною, то мѣра угла PAB будетъ равна половинѣ дуги PXB-$\frac{1}{2}$PFG; ибо уголъ PGB измѣряется $\frac{1}{2}$ю дуги PXB (§ 71), а мѣра угла APG=$\frac{1}{2}$ дуги PG (§ 72); но уголъ PGB-APG=∠PAB (§ 48. *Слѣд* 1); по сему и мѣра угла PGB безъ мѣры угла APG будетъ мѣра угла PAB; слѣдовательно половина дуги PXB-$\frac{1}{2}$PFG есть мѣра угла PAB.

§ 77. ЗАДАЧА. *Изъ точки B лежащей внѣ круга G провесть касательную къ кругу.* Фиг. 71.

Рѣшен. Данную точку B соедини съ центромъ круга A прямою линѣею AB, и раздѣля оную на двѣ равныя части въ точкѣ E, радіусомъ EB, опиши кругъ BCAG, коего окружность пересѣчется съ окружностію круга въ точкахъ C и G; чрезъ точки C и G проведи линѣи BC и BG, изъ коихъ каждая будетъ касательная къ кругу GC.

Доказ. Ибо проведя AC и AG, углы AGB и ACB, стоящіе на діаметрѣ AB, будутъ прямые (§ 71 *Слѣд.* 2); по сему линѣи BC и BG перпендикулярны къ радіусамъ AC и AG; слѣдовательно касательныя (§ 67).

Слѣдств. Изъ сего видно, что касательныя BC и BG изъ одной точки B къ кругу проведенныя, будутъ равны; ибо AC=AG радіусы, уголъ C=G прямые (§ 71), и AB общій бокъ треугольникамъ ABC и ABG, слѣдовательно BG=BC (§ 41).

§ 78. ЗАДАЧА. *Въ данномъ треугольникѣ ABC начертить кругъ, коего бы окружность касалась боковъ даннаго треугольника.* (Фиг. 79.

Рѣшен. Раздѣля углы A и C на двѣ равныя части линѣями AD и CD, изъ точки D взаимнаго ихъ сѣченія, на бокъ AB, опусти перпендикуляръ DH; потомъ поставя ножку циркула къ точкѣ D радіусомъ DH опиши кругъ EGH, то окружность онаго коснется боковъ даннаго треугольника въ точкахъ E, G и H.

Доказ. Изъ точки D опустя на AC и BC перпендикуляры DG и DE, проведи DB, то будетъ треугольникъ ADH=△ADG; ибо уголъ HAD=∠DAG, уголъ AHD=∠AGD прямые, ∠ADH=∠ADG (§ 48, *Слѣд.* 3), и бокъ AD обоимъ треугольникамъ есть общій, по сему DH =DG (§ 27). Также докажется что DE=DG, и для того будетъ DG=DH=DE, и слѣдовательно радіусы круга EGH, коего окружность касается боковъ даннаго треугольника (§ 67).

§ 79. *Опредѣл. Сегментъ или отрѣзокъ круга* AFB или AGB есть пространство опредѣ-

ленное частію окружности круга AFB или AGB и хордою AB. *Фиг.* 73.

§ 80. ЗАДАЧА. *На данной линѣи AB начертить отрѣзокЪ круга, вЪ которомЪ бы вписанной уголЪ равенЪ былЪ данному z.* Фиг. 75.

Рѣшен. У точки B сдѣлай уголЬ ABC равенЬ данному z; потомЬ на концѣ B линѣи BC, и изЬ средины E линѣи AB, поставь перпендикуляры BD и ED (§ 50 и 38). ИзЬ точки D (гдѣ перпендикулярныя пресѣклись), радіусомЬ DB опиши дугу BFA, получишь желаемой отрѣзокЬ круга AFB, вЬ которомЬ изЬ произвольно взятой точки F, проведенныя линѣи AF и BF кЬ концамЬ данной AB, составятЬ уголЬ AFB равенЬ данному z.

Доказ. Поелику BC касается круга вЬ одной только точкѣ B по рѣшенію, по сему уголЬ ABC измѣряется половиною дуги AGB (§ 79); но уголЬ AFB измѣряется половиною той же дуги AGB (§ 71); по сей причинѣ уголЬ ABC $=\angle$AFB; уголЬ же ABC$=$данному z по рѣшенію; слѣдовательно и уголЬ AFB$=$углу z.

Вышеписанное рѣшеніе сЪ доказательствомЪ, какЪ для остраго, такЪ и для тупаго угла z есть общее.

О четвероугольникахЪ и многоугольникахЪ.

§ 81. *Опредѣл.* Пространство ABCD, нѣкоторымЬ числомЬ прямыхЬ линѣй на плоскости окруженное, называется вообще *МногоугольникЪ* (*фиг.* 74); а прямыя линѣи AB, BC и проч. именуются *боками* онаго. Многоугольники названіе свое получаютЬ отЬ числа боковЬ или угловЬ, составляющихЬ простран-

ство многоугольника, *на прим.* пространство ABCD четырмя боками окруженное, называется *Четырехбочникъ* или *четвероугольникъ.* Многоугольникъ имѣющій пять боковъ, именуется *пятіугольникъ;* шестью боками ограниченный, называется *шестіугольникъ* и такъ далѣе.

§ 82. *Опредѣл.* Четвероугольники раздѣляются на три рода: на *Параллелограммы*, *Трапеціи* и просто называемые *ЧетвеWhile-сторонники.* — *Параллелограммъ* есть четверосторонникъ ABCD, у котораго противулежащіе бока параллельны (*фиг.* 75, 76, 77, 78). *Параллелограммы* для различія между собою имѣютъ слѣдующія названія: *Параллелограммъ* ABCD, у котораго два прилежащіе бока BA и AD и углы B и A неравны остаются при своемъ названіи (*фиг.* 75). *Прямоугольникъ* ABCD есть такой параллелограммъ, у котораго всѣ углы прямые и два прилежащіе бока BA и AD неравны (*фиг.* 76). *Квадратъ* ABCD, есть прямоугольникъ, у котораго всѣ бока равны и всѣ углы прямые (*фиг.* 77) *Ромбъ* есть равнобочной параллелограммъ ABCD, у котораго всѣ бока равны и два прилежащіе угла A и B неравны (*фиг.* 78).

Трапеція ABCD есть такой четверосторонникъ, у котораго только два противулежащіе бока BC и AD параллельны; а два другіе бока AB и CD или равны, или неравны (*фиг.* 79).

Четверосторонникъ ABCD просто называемой есть тотъ, у котораго бока AB, BC и проч. неравны и не параллельны одинъ другому (*фиг.* 74).

§ 83. *Опредѣл.* Во всякомъ параллелограммѣ и трапецiи ABCD, линѣя BE, между параллельными боками AD и BC перпендикулярно проведенная, называется высота параллелограмма или трапецiи (*фиг.* 75. 78. 79). Бокъ AD, на которой проводится перпендикулярно BE, называется *Основанiе* параллелограмма или трапецiи.

§ 84. *Опредѣл.* Во всякомъ четверосторонникѣ ABCD (*фиг.* 74, 76, 79) или многоугольникѣ ABDCE (*фиг.* 80), линѣя AC, соединяющая противулежащiе углы A и C, называется *Дiогональ*.

§ 85. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ четверосторонникѣ ABCD, сумма всѣхъ внутреннихъ угловъ равна четыремъ прямымъ угламъ или 360 град.* Фиг. 74.

Доказ. Проведя дiогональ AC, произойдетъ два треугольника ABC и ACD коихъ всѣ углы вмѣстѣ взятые, составляютъ сумму внутреннихъ угловъ четыреугольника ABCD; но поелику сумма угловъ каждаго изъ сихъ треугольниковъ равна двумъ прямымъ угламъ; слѣдовательно сумма внутреннихъ угловъ четверосторонника ABCD равна 4мъ прямымъ угламъ или 360 град.

Прибавл. I. Изъ сего удобно разумѣть можно, когда въ четверосторонникѣ сумма двухъ какихъ нибудь угловъ равна двумъ прямымъ угламъ, то и сумма двухъ прочихъ также равна двумъ прямымъ угламъ или 180 град.

Прибавл. II. Ежели въ параллелограммѣ будетъ одинъ уголь B прямой (*фиг.* 76), то

и прочіе будутъ прямые; ибо $\angle B + \angle C = 180°$ (§ 43. *Слѣд.* 2); но уголъ $B = 90°$, по сему и уголъ $C = 90°$; также докажется, что и уголъ D есть прямой.

§ 86. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ многоугольникѣ* ABDCEF *сумма внутреннихъ угловъ, равна произведенію изъ числа боковъ безъ двухъ на два прямые угла.* Фиг. 80 и 81.

Доказ. Проведя въ многоугольникѣ ABDCEF произвольнымъ образомъ діогонали AE, AC и CB изъ одного угла въ другой, произойдетъ число треугольниковъ BCD, ABC и проч. равно числу боковъ многоугольника безъ двухъ, и сумма угловъ всѣхъ сихъ треугольниковъ будетъ равна суммѣ всѣхъ внутреннихъ угловъ многоугольника; но поелику сумма угловъ всякаго треугольника равна двумъ прямымъ угламъ (§ 48); по сей причинѣ сумма всѣхъ угловъ оныхъ треугольниковъ, составляющихъ сумму всѣхъ угловъ многоугольника, равна произведенію изъ числа треугольниковъ, или изъ суммы боковъ безъ двухъ, на два прямые угла, то есть $(6-2) \times 2 = 4 \times 2 = 8$ прямымъ угламъ.

Слѣдств. Изъ сего удобно разумѣть можно, что сумма всѣхъ внутреннихъ угловъ всякаго многоугольника найдется, когда число его боковъ безъ двухъ на 180° умножится.

§ 87. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ многоугольникѣ сумма наружныхъ угловъ* CEG+DCH+ *и проч. отъ продолженія боковъ многоугольника происшедшихъ, равна четыремъ прямымъ угламъ или* 360 *град.* Фиг. 80.

Доказ. Поелику каждой внутренній уголъ, *на прим.* FEC со смѣжнымъ ему наружнымъ

угломъ CEG составляютъ два прямыхъ угла (§ 17); слѣдовательно сумма внутреннихъ и наружныхъ угловъ вмѣстѣ равна произеденію изъ числа боковъ многоугольника на два прямые угла, то есть $6 \times 2 = 12$ прямымъ угламъ; но какъ сумма внутреннихъ угловъ многоугольника, по предыдущей теоремѣ равна произведенію изъ числа боковъ безъ двухъ на два прямые угла, то есть $(6-2) \times 2 = 4 \times 2 = 8$ прямымъ угламъ; слѣдовательно, ежели 8 вычтется изъ 12, то остатокъ 4, означающій число прямыхъ угловъ или 360 град., будетъ равенъ суммѣ наружныхъ угловъ CEG+DCH+ и проч.

§ 88. ЗАДАЧА. *Найти сумму градусовъ наружныхъ угловъ такого многоугольника, у котораго одинъ уголъ входящій.* (Фиг. 31

Рѣшен. Къ четыремъ прямымъ угламъ или 360° придай два прямыхъ угла, то получится требуемая сумма град. наружныхъ угловъ многоугольника, т. е. шесть прямыхъ угловъ, или 6×90 град. $= 540$ град.

Доказ. Точки D и E соединя прямою линѣею ED, произойдетъ многоугольникъ ABDEF безъ входящаго угла, у котораго будетъ сумма наружныхъ угловъ a, b c, d, e по предыдущей теоремѣ, равна 4 прямымъ угламъ; но въ разсужденіи входящаго угла C, слѣдуетъ еще къ четыремъ прямымъ угламъ придать недостающее число угловъ C, n и m, коихъ сумма равна двумъ прямымъ угламъ (§ 48); слѣдовательно сумма наружныхъ угловъ многоугольника $a+b+c+m+C+n+d+e=6$ прямымъ угламъ.

Слѣдств. Изъ того явствуетъ, что для сысканія суммы наружныхъ угловъ какого нибудь многоугольника со входящими углами, должно къ четыремъ прямымъ угламъ на всякой входящій уголъ, придавать по два прямыхъ угла.

§ 89. ЗАДАЧА. *На данной линѣи AD начертить квадратъ.* (Фиг. 77.

Рѣшен. Изъ точекъ A и D, на данной линѣи AD, поставь перпендикуляры AB и DC = AD (§ 50); потомъ точки B и C соедини прямою линѣею BC, то получится требуемой квадратъ ABCD.

Доказ. Поелику AD=AB=DC и углы DAB и ADC прямые по рѣшенію, по сему и CB параллельна къ AD (§ 42), также и AB параллельна къ DC (§ 44. *Слѣд.* 2); уголъ A+B=2 прямымъ угламъ (§ 43. *Слѣд.* 2); но уголъ A есть прямой, по сему и уголъ B прямой, четвертой же уголъ C непремѣнно прямой; слѣдовательно четверосторонникъ ABCD есть квадратъ (§ 82).

§ 90. ЗАДАЧА. *По основанію AB и высотѣ AD, начертить прямоугольникъ.* (Фиг. 82.

Рѣшен. Взявъ линѣю AB за основаніе, изъ точекъ A и B поставь перпендикуляры AD и BC равные высотѣ AD (§ 50); потомъ точки D и C, соединя прямою линѣею CD, получится требуемой прямоугольникъ.

Доказ. Поелику AD=BC и перпендикулярны къ AB, по сему DC параллельна къ AB (§ 42), также AD параллельна къ BC, и углы A, B, C, D суть прямые; слѣдовательно параллелограммъ ABCD есть прямоугольникъ (§ 82).

§ 91. ЗАДАЧА. *На линѣи AB по данному углу y, начертить ромбъ.* Фиг. 83.

Рѣшен. У точки A данной линѣи AB, сдѣлай уголъ BAD=y (§ 34), на сторонѣ котораго положи линѣю AD=AB; потомъ изъ точекъ D и B проведи DC и BC параллельно къ AB и AD (§ 46), кои взаимно пересѣкшись въ точкѣ C, составятъ трѣбуемой ромбъ (§ 82).

§ 92. ЗАДАЧА. *По двумъ линѣямъ AD и BC и углу z, начертить параллелограммъ.* Фиг. 84.

Рѣшен. Взявъ линѣю AD за основаніе, сдѣлай у точки A уголъ BAD, равенъ данному z (§ 34), положи AB=BC; изъ точекъ B и D проведи BG и DG параллельно къ AD и AB (§ 46), отъ чего произойдетъ требуемой параллелограммъ (§ 82).

§ 93. ЗАДАЧА. *Изъ четырехъ линѣй AB, BC, CD и DE, начертить трапецію, чтобы BC была параллельна основанію AB.* Фиг. 85.

Рѣшен. Взявъ линѣю AB за основаніе, положи на оной линѣю AF=BC, потомъ на BF начерти треугольникъ FGB, котораго бы бокъ BG былъ равенъ CD и бокъ FG=DE (§ 33); изъ точекъ G и A проведи линѣи GC и AC параллельно къ AB и FG (§ 46), кои пересѣкшись въ точкѣ C, составятъ требуемую трапецію.

Доказ. Поелику AB=AB, AF=CB, GF=DE по положенію; но AF и CG, также AC и GF между собою параллельны по рѣшенію; по сему AF=CG=BC, AC=GF=FD, слѣдовательно трапеція ABGC имѣетъ бока равны даннымъ линѣямъ.

Примѣч. Такимъ же образомъ начертится трапеція и по тремъ даннымъ линѣямъ, съ тою толь

ко разностїю, что на линѣи FB, которая равна разности двухЪ линѣй (кои имѣютЪ быть параллельными между собою), должно сдѣлать равнобедренной треугольникЪ BGF, котораго бы бока были равны данной третїей линѣи CD, а впрочемЪ надлежитЪ поступать по вышеписанному рѣшенїю.

§ 94. ЗАДАЧА. *По тремЪ даннымЪ линѣямЪ* AB, BC, CD *и углу* x *начертить трапецїю, чтобы* BC *была параллельна основанїю* AB. Фиг. 86.

Рѣшен. и *Доказ.* ВзявЪ линѣю AB за основанїе, сдѣлай у точки B уголЪ ABC$=x$ (§ 34), на сторонѣ котораго положи BC$=$CD. ИзЪ точки C проведи CD параллельно кЪ AB$=$BC; наконецЪ точки A и D соедини прямою линѣею AD, получишь требуемую трапецїю.

§ 95. ЗАДАЧА. *По даннымЪ: высотѣ* AB, *углу* z *и двумЪ линѣямЪ* AD *и* BC, *кои должны быть параллельными боками, начертить трапецїю.* Фиг. 87.

Рѣшен. Сдѣлай основанїе AD$=$данной AD, у точки A сдѣлай уголЪ DAB$=z$, изЪ точки A поставь перпендикулярЪ AG$=$данной высотѣ AB; потомЪ изЪ точки G проведи неопредѣленную линѣю параллельно кЪ AD, на которой отЪ точки B положи BC$=$данной BC; наконецЪ точки C и D соединя прямою линѣею CD, получится требуемая трапецїя, имѣющая высоту равную данной AB.

§ 96. *Опредѣл. Вписанной вЪ кругѣ многоугольникЪ* ABEFGH есть тотЪ, котораго всѣ верхи угловЪ A, B и проч. находятся на окружности круга (*фиг.* 89). А *описанной около круга многоугольникЪ* ABCDE есть тотЪ, котораго бока касаются окружности круга (*фиг.* 88).

§ 97. *Опредѣл.* Правильные многоугольники суть тѣ, у которыхъ всѣ бока AB, BC, CD и проч. и углы EAB, ABC, BCD и проч. равны, какъ на прим. ABCDE (*фиг.* 88); а въ противномъ случаѣ называются *неправильными*.

§ 98. *Опредѣл.* Уголъ ABC, составляющійся изъ боковъ AB и BC правильнаго многоугольника, называется *уголъ окружности* или *уголъ полигона*.

§ 99. ТЕОРЕМА. *Около всякаго правильнаго многоугольника опишется кругъ.* (Фиг. 88.

Доказ. Положимъ, что будетъ правильной пяти-угольникъ ABCDE. И такъ когда уголъ EAB сего многоугольника, также и ближайшій къ нему ABC раздѣлятся на двѣ равныя части линѣями AE и BF; потомъ изъ точки F проведутся FE, FD и FC, то будетъ треугольникъ AFB=BFC; ибо уголъ ABF=FBC=FAB по рѣшенію, бокъ AB=BC, и FB общій бокъ; по сему FC=AF(§ 26)=FB(§ 51). Уголъ FCB=FBA=FAB=$\frac{1}{2}$BAE; также треугольникъ AEF=AFB, потому что уголъ FAE=FAB, бокъ AB=AE, AF общій бокъ, по сему FB=AF=EF. Такимъ же образомъ докажется, что линѣя EF=FD=FC; слѣдовательно, ежели изъ точки F радіусомъ FA опишется кругъ, то окружность онаго пройдетъ чрезъ верхи угловъ A, B, C, D и E многоугольника.

Слѣдств. I. Когда въ правильномъ многоугольникѣ, каждой уголъ EAB, ABC и проч. раздѣлятся пополамъ и проведутся линѣи AF, BF, EF и проч., то они соединятся въ центрѣ F правильнаго многоугольника; и много-

угольникъ раздѣлится на столько равныхъ между собою треугольниковъ, сколько многоугольникъ боковъ имѣетъ.

Слѣдств. II. Изъ того же видно, что для начертанія правильнаго многоугольника въ кругѣ, должно окружность онаго раздѣлить на столько равныхъ частей, сколько многоугольникъ боковъ имѣть долженъ; ибо равнымъ хордамъ AB BC, CD ED и AE равныя дуги соотвѣтствуютъ и углы около точки F на равныхъ дугахъ стоящіе, суть равны между собою.

Слѣдств. III. Когда изъ центра F, на каждой бокъ правильнаго многоугольника, опустятся перпендикуляры FG, FH и проч., то они въ разсужденіи равныхъ треугольниковъ AFB, BFC и проч., будутъ равны между собою; слѣдовательно естьли одинъ изъ сихъ перпендикуляровъ FG возьмется за радіусъ, то впишется въ многоугольникѣ кругъ GHIKL, котораго окружность коснется боковъ правильнаго многоугольника, не прорѣзывая оныхъ (§ 67).

§ 100. *Опредѣл. Уголъ* AFB *центра правильнаго многоугольника* есть тотъ, котораго бока AF и BF суть радіусы, проведенные изъ центра F къ концамъ какого нибудь бока многоугольника.

§ 101. ТЕОРЕМА. *Наружной уголъ* CBM *всякаго правильнаго многоугольника* ABCDE *равенъ углу* AFB *при центрѣ.* Фиг. 88.

Доказ. Поелику уголъ CBM измѣряется половиною дуги ABC (§ 75); но половина сей дуги равна дугѣ AB, измѣряющей уголъ AFB (§ 58); по сему какъ наружной уголъ CBM, такъ и уголъ AFB при центрѣ измѣряются

одною дугою AB, и слѣдовательно уголъ CBM $=\angle AFB$ (§ 14).

Слѣдств. I. Изъ сего удобно видѣть можно, что уголъ AFB центра съ угломъ ABC окружности, равны двумъ прямымъ угламъ или 180°; ибо уголъ $CBM + \angle ABC = 180°$; но уголъ $CBM = \angle AFB$, слѣдовательно и уголъ $AFB + \angle ABC = 180$ град.

Слѣдств. II. Всякаго правильнаго многоугольника уголъ центра AFB сыщется, когда 360 град. на число боковъ многоугольника раздѣлится, потому что углы AFB, BFC и проч. при центрѣ суть равны между собою; слѣдовательно столько разъ уголъ центра содержится въ 360 град., сколько многоугольникъ боковъ имѣетъ. Уголъ же ABC при окружности найдется, когда уголъ центра AFB изъ двухъ прямыхъ угловъ или 180° вычтется.

§ 102. ЗАДАЧА. *По данному углу окружности $167\frac{1}{7}$ град. правильнаго многоугольника, сыскать число боковъ онаго.*

Рѣшен. Уголъ окружности $167\frac{1}{7}$ град. вычти изъ 180 град., получишь уголъ центра $12\frac{6}{7}$ (§ 101. *Слѣд.* 2); потомъ раздѣли 360 град., частное 28 будетъ число боковъ многоугольника.

Доказ. Поелику частное число 28 показываетъ число равныхъ дугъ на окружности круга, слѣдовательно 28 хордъ, кои проведутся между равными дугами окружности, будутъ равны, и чрезъ то изобразится правильной 28'ми-угольникъ (§ 99. *Слѣд.* 2).

§ 103. ТЕОРЕМА. *Радіусъ AC всякаго круга равенъ боку шести-угольника вписаннаго въ томъ же кругѣ.* (Фиг. 89.

Доказ. Проведя хорду AB равну радіусу AC и радіусъ BC, произойдетъ треугольникъ ACB равносторонной (§ 23), коего уголъ ACB =60 град.; но 60° есть шестая часть отъ 360°, по сему дуга AB есть шестая часть окружности, по которой хорда AB, равная радіусу AC, положится 6 разъ, и слѣдовательно радіусъ AC есть бокъ шести-угольника ABEFGH, вписаннаго въ кругѣ.

§ 104. ЗАДАЧА. *Въ данномъ кругѣ ABC начертить равносторонной треугольникъ.* Фиг. 90.

Рѣшен. Проведи діаметръ CD (§ 60), раздѣли оной на четыре равныя части (§ 47); чрезъ точку G третіей части, AB перпендикулярно къ діаметру CD, потомъ точки B, C и A соедини прямыми линѣями AC и BC, то изобразится равносторонной треугольникъ ABC.

Доказ. Проведя радіусъ AE и хорду AD, будетъ треугольникъ AEG=AGD; ибо уголъ AGE=AGD прямые, и бокъ EG=GD по рѣшенію; AG обоимъ треугольникамъ есть общій бокъ, по сему AE=AD (§ 96) и равны боку шести-угольника по предыдущей теоремѣ; слѣдовательно дуга AD есть шестая часть окружности; но дуга DB=AD (§ 59. *Слѣд.* 2), по сему дуга ADB=$\frac{2}{6}$=$\frac{1}{3}$ окружности круга, также и дуга AC=BC (§ 59. *Слѣд.* 2); по сей причинѣ каждая=$\frac{1}{3}$ окружности круга, слѣдовательно хорды AB, AC и BC суть равны между собою (§ 58. *Слѣд.*), и треугольникъ ABC есть равносторонной.

Прибавл. Изъ начертанія равносторонняго треугольника ABC видно, что радіусъ AE или CE, равенъ двумъ третямъ высоты

CG; ибо радіусъ CE состоитъ изъ двухъ такихъ частей, каковыхъ высота CG имѣетъ три (*Ариѳм.* § 44).

§ 105. ЗАДАЧА. *Около даннаго круга ABC начертить равносторонной треугольникъ.* (Ф. 91.

Рѣшен. Начерти сперва въ данномъ кругѣ равносторонный треугольникъ EFD (§ 104); потомъ изъ центра G проведи радіусы AG, BG и GC перпендикулярно къ бокамъ треугольника EFD (§ 39); чрезъ точку A проведи линѣи KH перпендикулярно къ радіусу GA; продолжи радіусы GE и GF, пока пересѣкутся съ перпендикулярною KH въ точкахъ K и H; потомъ изъ точекъ K и H, чрезъ концы C и B радіусовъ GC и GB, проведи KI и HI, кои взаимно пересѣкшись въ точкѣ I, составятъ равносторонный треугольникъ KHI.

Доказ. Поелику уголъ AGK=KGC измѣряются равными дугами AE и EC, CG=AG радіусы, и KG есть общій бокъ треугольникамъ AGK и CGK, по сему оные треугольники равны между собою (§ 26); слѣдственно уголъ GAK=GCK прямые. Также докажется, что и уголъ GBH есть прямой; по сему линѣи KI и HI касаются круга въ точкахъ C и B (§ 67), и слѣдовательно параллельны ED и FD; по сему ∠NEG=CKG и ∠PEG=AKG (§ 43. *Слѣд.* 1), а потому и ∠DEF=IKH; также докажется, что и уголъ EFD=KHI и уголъ EDF=KIH, и каждой изъ нихъ=60 град.; слѣдовательно треугольникъ KHI равносторонной (§ 93).

§ 106. ЗАДАЧА. *Въ данномъ кругѣ ADBC начертить квадратъ.* Фиг. 29.

Рѣшен. Сыскавъ центръ G круга (§ 60), проведи діаметръ AB; потомъ чрезъ центръ G проведи другой CD перпендикулярно къ первому AB; наконецъ точки A, D, B и C соединя прямыми линѣями AD, DB, BC и CA, изобразится требуемой квадратъ ADBC.

Доказ. Поелику углы при центрѣ G суть прямые по рѣшенію; по сей причинѣ хорды AD, DB, BC и CA стягивающія равныя дуги, суть равны между собою; также и углы A, D, B и C, по § 71. *Слѣд.* 2 прямые; слѣдовательно четвеpосторонникъ ADBC есть квадратъ (§ 82).

§ 107. ЗАДАЧА. *Около даннаго круга* ADBC *вписать квадратъ.* Фиг. 92.

Рѣшен. Проведя два діаметра AB и CD пересѣкающіеся перпендикулярно; чрезъ концы A, D, B и C сихъ діаметровъ, проведи линѣи IH, IE, EF и FH перпендикулярно къ діаметрамъ AB и CD; то отъ взаимнаго пресѣченія оныхъ изобразится требуемой квадратъ EFHI.

Доказ. Поелику AB=IE=HF, и AB=CD=IH=EF (§ 45); по сему IE=HF=IH=EF; и притомъ уголъ ABF=IEF, ∠ABE=HFE; также уголъ IAB=IHF и ∠BAH=EIH (§ 43. *Слѣд.* 1) прямые, слѣдовательно четвеpосторонникъ EFHI есть квадратъ.

§ 108. ЗАДАЧА. *Въ данномъ кругѣ* ABD *начертить правильной осьми-и шестнадцатиугольникъ.* Фиг. 93.

Рѣшен. Проведи діаметръ AB, изъ центра онаго поставь перпендикуляръ CD, точки D и B соедини прямою линѣею DB, на которую, изъ центра C, опустя перпендикуляръ CE,

хорда ED будетъ бокъ восьми-угольника. А когда на сей бокъ ED опустится перпендикуляръ CM, то проведенная хорда DM, будетъ бокъ шестнадцати-угольника.

Доказ. Поелику дуга DMEB есть четверть окружности круга, и дуга DME $=\frac{1}{2}$ дуги DMEB; по сему DME $=\frac{1}{8}$ части окружности, и хорда DE есть бокъ осьми-угольника. Также дуга DM $=\frac{1}{2}$ дуги DME (§ 59. *Слѣд.* 2), по сему дуга DM $=\frac{1}{16}$ части окружности; слѣдовательно хорда DM = боку шестнадцати-угольника.

§ 109. ЗАДАЧА. *На данной линѣѣ AB, начертить правильной осьми-угольникъ.* (Фиг. 94.

Рѣшен. Данную линѣю AB раздѣли на двѣ равныя части въ точкѣ C, изъ которой на AB поставь перпендикуляръ CD $=\frac{1}{2}$AB, и продолжа CD, сдѣлай DE = AD; изъ точки E радіусомъ AE опиши кругъ ABF, по окружности котораго положа данную AB восемь разъ, начертится требуемой осьми-угольникъ.

Доказ. Ибо AC = CD по положенію, по сему уголъ CDA = CAD = 45 град. (§ 48. *Слѣд.* 5); уголъ CDA = DEA + DAE (§ 48. *Слѣд.* 1); но уголъ DEA = ∠DAE противъ равныхъ боковъ AD и DE; слѣдовательно уголъ DEA $=\frac{1}{2}$ угла ADC; и такъ уголъ AEB = ADC $=45^{\circ}=\frac{360}{8}$; по сему дуга AB $=\frac{1}{8}$ части окружности круга; слѣдовательно хорда AB по окружности круга положится 8 разъ; при чемъ произойдетъ правильной осьми-угольникъ ABGFH.

Примѣч. Для начертанія на данной линѣи AB правильнаго 16-ти-угольника, должно еще сдѣлать EF = AE, потомъ изъ точки F, радіусомъ AF описать кругъ; по окружности котораго данная AB

положится 16 разъ, и проведенная по симъ точкамъ равныя хорды, изобразятъ правильной 16ти-угольникъ. Ибо уголъ AFB$=\frac{1}{2}$ угла AEB (§ 71. *Слѣд.* 1), $=22\frac{1}{2}$ град.$=\frac{360}{16}$; слѣдовательно дуга AB$=\frac{1}{16}$ части окружности круга радіуса FA.

§ 110. ЗАДАЧА. *Въ данномъ кругѣ AGBC, начертить правильной двенадцати-угольникъ.* Фиг. 95.

Рѣшен. Изъ произвольно взятой на окружности круга точки A, радіусомъ AD опиши дугу, которая бы прорѣзала окружность круга въ точкѣ B, проведи хорду AB, на которую изъ центра D опусти перпендикуляръ DC, то проведенная хорда AC будетъ бокъ требуемаго многоугольника, которая по окружности круга положится 12 разъ, и чрезъ то начертится правильной двенадцати-угольникъ.

Доказ. Поелику AB$=$BD по положенію, и равна боку шести-угольника (§ 103); по сему дуга ACB есть шестая часть окружности; но дуга AC$=$BC (§ 59. *Слѣд.* 2); по сему дуга AC есть $\frac{1}{12}$ часть окружности круга; слѣдовательно хорда AC равна боку 12ти-угольника.

Слѣдств. Ежели изъ центра D, на бокъ AC двенадцати-угольника опустится пенпендикуляръ DF, и проведется хорда AF, то оная будетъ бокъ двадцати-четырехъ угольника.

Прибавл. Посредствомъ сего правила, прямой уголъ ADE удобно раздѣляется на три равныя части, положивъ хорду AB равну радіусу AD, и хорду EC равну радіусу ED; ибо въ равностороннемъ треугольникѣ уголъ ADB $=60°$, по сему уголъ BDE$=30°$; также, когда уголъ CDE$=60°$, то останется уголъ ADC

$=30°$; слѣдовательно и уголъ CDB$=30°$, и каждой изъ нихъ равенъ $\frac{1}{3}$ прямаго угла.

§ 111. ЗАДАЧА. *На данной линѣѣ AB, начертить правильной 12ти-угольникъ.* (Фиг 96.

Рѣшен. На данной AB, начерти равносторонной треугольникъ ABE. Изъ E на бокъ AB опусти перпендикуляръ CE, и продолжа оной, сдѣлай ED$=$AE; потомъ изъ точки D, радіусомъ AD начерти кругъ, по окружности котораго положа данную AB 12 разъ, начертится требуемой двенадцати-угольникъ.

Доказ. Поелику AEB$=60°$ (§ 48 *Слѣд.* 1); и треугольникъ ACE$=$CBE, потому что AC$=$BC, CE обоимъ треугольникамъ общій бокъ, и уголъ ACE$=$ECB прямые, по сему уголъ AEC $=$CEB$=30°=$EAD$+$EDA (§ 48. *Слѣд.* 1); но ED$=$AE по положенію, по сему уголъ EAD$=$EDA$=\frac{1}{2}$AEC$=15$ град. Также докажется, что и уголъ ADB$=15°$, слѣдовательно уголъ ADB $=30°=\frac{360}{12}$; а потому дуга AB$=\frac{1}{12}$ части окружности, и для того хорда AB по окружности круга положится 12 разъ; слѣдовательно произшедшій отъ того многоугольникъ ABE есть правильной двенадцати-угольникъ.

§ 112. ЗАДАЧА. *Въ данномъ кругѣ по транспортиру начертить какой нибудь правильной многоугольникъ.* (Фиг. 97.

Рѣшен. Положимъ, что въ данномъ кругѣ требуется начертить правильной девяти-угольникъ; то для сего сыскавъ уголъ центра девяти-угольника (§ 101. *Слѣд.* 2), которой будетъ $=40°$; сдѣлай у центра A, посредствомъ транспортира, уголъ BAC$=40°$ (§ 34. *Приб.*); тогда проведенная хорда BC будетъ

бокъ желаемаго многоугольника вписаннаго въ кругѣ.

Доказ. Поелику уголъ центра девяти-угольника $=\frac{360}{9}=40°=$ углу CAB по сему дуга BC девятая часть окружности; слѣдовательно хорда BC по окружности круга положится девять разъ, и чрезъ то изобразится правильной девяти-угольникъ.

§ 113. ЗАДАЧА. *На данной линѣѣ AB, по транспортиру начертить какой нибудь правильной многоугольникъ.* Фиг. 98.

Рѣшен. Сыскавъ уголъ центра многоугольника (§ 101. *Слѣд.* 2), вычти оной изъ 180°, то получится уголъ полигона; потомъ раздѣля найденной уголъ пополамъ, назначь у концовъ A и B данной линѣи AB, посредствомъ транспортира углы CAB и CBA во столько градусовъ, сколько половина угла многоугольника въ себѣ заключать должна (§ 34. *Приб.*); потомъ чрезъ замѣченныя точки *n* и *n*, проведя линѣи AC и BC, изъ точки C радіусомъ AC опиши кругъ, по окружности котораго положа хорду AB, получится требуемой многоугольникъ.

Доказ. Положимъ, что на данной линѣѣ AB требовалось начертить правильной пяти-угольникъ, то уголъ ACB при центрѣ правильнаго пяти-угольника будетъ $=\frac{5}{360}=72°$ (§ 101. *Слѣд.* 2), и $\frac{180-72}{2}=54°=$ углу ABC$=$BAC по рѣшенію; по сему уголъ ABC$+$BAC$=108°$; слѣдственно $180°-108°=72°=$ углу ACB$=$ углу центра пяти-угольника; а потому дуга AB есть пятая часть окружности, по которой AB положится 5 разъ.

§ 114. ТЕОРЕМА. *Около даннаго круга начертить правильной многоугольникъ.* Фиг. 99.

Рѣшен. Сперва въ данномъ кругѣ начерти правильной многоугольникъ подобной требуемому, *наприм.* шести-угольникъ ABEDC (§ 112). Изъ центра F проведи прямую линѣю FH, перпендикулярно къ боку AB, которая какъ бокъ AB въ точкѣ G, такъ и соотвѣтствующую сей хордѣ дугу AHB въ точкѣ H, раздѣлитъ на двѣ равныя части; проведи радiусы FA и FB; потомъ продолжа радiусы FA и FB до I и K, чрезъ точку H проведи линѣю IK параллельно къ AB, то оная будетъ бокъ требуемаго многоугольника; потомъ продолжи радiусы FC, FD и проч., такъ чтобы была FI =FN=FM и проч.; напослѣдокъ точки I, N, M и проч. соединя прямыми линѣями IN, NM, ML и проч., произойдетъ требуемой многоугольникъ IKLMN около круга описанной.

Доказ. Поелику AB параллельна къ IK, и FH перпендикулярна къ AB и IK, уголъ FGA =∠LHI прямые, по сему линѣя IK касается даннаго круга въ точкѣ H (§ 67). также уголъ FAB=∠FIK и уголъ FBA=FKI (§ 43. *Слѣд.* 1); но линѣя FI=FN=FM и проч, также и уголъ IFK=IFN=NFM=MFL при центрѣ вписаннаго шести-угольника; по сему треугольники IFK, IFN, NFM и проч. равны между собою; по сей причинѣ бокъ IK=IN=NM и проч.; перпендикулярная FH=FO=FP и проч. радiусы круга по рѣшенiю; равнымъ образомъ докажется, что уголъ KIN=INM=NML и пр., слѣдовательно шести-угольникъ IKLNM есть правильной (§ 97), и каждой онаго бокъ касается окружности круга (§ 67).

О пропорціональныхъ линѣяхъ и подобствѣ треугольниковъ.

§ 115. *Опредѣл.* Ежели изъ четырехъ линѣй AB, CD, EF и GH, первая AB содержится въ другой CD столько разъ, сколько третья EF содержится въ четвертой GH, то есть ежели AB:CD=EF:GH, то такія линѣи называются *Геометрически соразмѣрны* или *пропорціональны* (*фиг.* 100). Но ежели изъ трехъ линѣй AB, CD и EF, первая AB содержится въ другой CD столько разъ, сколько вторая CD въ третьей EF, т. е. ежели AB:CD=CD:EF, то такія линѣи составляютъ *непрерывную Геометрическую пропорцію*, изъ коихъ вторая CD именуется *Средняя пропорціональная* между первою AB и послѣднею EF (*Ариѳм.* § 114. *фиг.* 101).

Примѣч. Содержаніе между двумя первыми и двумя послѣдними разумѣется такимъ образомъ: *на прим.* ежели AB (*фиг.* 100) содержитъ въ себѣ три такихъ равныхъ частей, каковыхъ CD заключаетъ въ себѣ шесть; также и EF содержитъ въ себѣ три другихъ равныхъ частей, каковыхъ GH имѣетъ въ себѣ шесть; то такія линѣи составляютъ Геометрическую пропорцію; ибо первая AB содержится въ другой CD два раза, также и третья EF содержится въ четвертой GH два же раза. Естьли же положимъ, что каждая малая часть изъ составляющихъ линѣй AB и CD будетъ $=\frac{2}{3}$ каждой малой части, изъ составляющихъ линѣи EF и GH, то будетъ и цѣлая $AB=\frac{2}{3}EF$; также и $CD=\frac{2}{3}$ (*Ариѳм.* § 19); по сему будетъ AB:EF=2:3, также и CD:GH=2:3, т. е. AB содержится къ EF полтора

раза, также и CD содержится въ GH полтора раза, и для того будетъ AB:EF=CD:GH (*Ариѳм.* § 113).

§ 116. *Опредѣл.* *Подобные треугольники* суть тѣ, изъ коихъ три угла A, B и C одного треугольника, равны порознь тремъ угламъ D, E и F другаго. Бока AB и DE, BC и EF, AC и DF противулежащіе равнымъ угламъ, именуются *сходственными*. Фиг. 102.

§ 117. ТЕОРЕМА. *Въ подобныхъ треугольникахъ* ABC *и* DBH, *сходственные бока* DB:AB, BH:BC, DH:AC *Геометрически пропорціональны, т. е.* DB:AB=BH:BC=DH:AC. (Фиг. 103.

Доказ. Представимъ себѣ, что треугольникъ DBH положится на треугольникъ ABC такъ, чтобы точка B упала на точку B и бокъ DB положился на бокъ AB; но какъ уголъ B=B, то бокъ BH упадетъ на бокъ BC и бокъ DH упадетъ правильно къ AC, потому что уголъ D=A (§ 44. *Слѣд.* 1), и будетъ BK=BH, DK=DH. Теперь ежели вообразимъ себѣ, что бокъ AB имѣетъ въ себѣ семь такихъ равныхъ частей, каковыхъ бокъ BD содержитъ въ себѣ три части, и когда изъ точекъ, означающихъ части бока AB, проведутся линѣи параллельно къ боку AC и BC, то бока BK и BC, DK и AC раздѣлятся на стольковъ между собою равныхъ частей, сколько бокъ BD и AB имѣетъ въ себѣ равныхъ частей (§ 47); по сей причинѣ будетъ BD:AB=3:7, также BK:BC=3:7 и DK:AC=3:7; но поелику вторыя содержанія каждой изъ сихъ пропорцій, равны между собою, слѣдовательно и первыя содержанія будутъ равны (*Ариѳм.* § 119), и для того будетъ BD:AB=BK:BC=DK:AC

(*Ариѳм.* § 113), т. е. DB : AB = BH : BC = DH : AC; слѣдовательно въ подобныхъ треугольникахъ сходственные бока Геометрически пропорціональны (*).

Слѣдств. I. Изъ предписанной теоремы явствуетъ, когда BD : AB = BK : BC, то будетъ и AB—BD : BD = BC—BK : BK (*Ариѳм.* § 118); но поелику AB—BD = AD и BC—BK = CK, то будетъ AD : BD = CK : BK, или BD : AD = BK : KC, также AD : KC = BD : BK (*Ариѳм.* § 117).

Слѣдств. II. Изъ вышеписаннаго слѣдуетъ, что во всякомъ треугольникѣ, сколько бы ни было проведено линѣй параллельно къ боку AC, то части боковъ FG, GA, MN и NC, находящіяся между параллельныхъ линѣй, будутъ Геометрически пропорціональны, то есть, FG : GA = MN : NC (*фиг.* 104); ибо проведя линѣи

(*) Въ какомъ бы положеніи подобные треугольники не были, всегда изъ сходственныхъ боковъ легко составиться можетъ пропорція, естьли только взяты будутъ сходственные бока одного треугольника за предыдущіе члены, а другаго треугольника за послѣдующіе, какъ-то изъ пропорціи BD . AB = BK : BC видно, что бокъ BD лежащій противъ угла BKD перваго треугольника DBK, содержится къ AB противъ равнаго угла ACB другаго треугольника ABC, какъ другой бокъ BK противъ угла BDK перваго треугольника, содержится къ боку BC противъ равнаго угла BAC другаго треугольника: что учащимся всегда наблюдать должно; поелику изъ такой пропорціи уже легко можно выводить и другія потребныя перемѣны (*Ариѳм.* § 117 и 118).

FD и GE параллельно къ боку BC, будутъ треугольники GED и AGE подобны, потому что уголъ FGD=GAE, уголъ GFD=AGE (§ 43. *Слѣд.* 1), и уголъ GDF=AFG (§ 48. *Слѣд.* 3); то для подобія сихъ треугольниковъ будетъ FG:AG=FD:GE; но ED=MN и GE=NC (§ 45); слѣдовательно и FG:GA=MN:NC (*Ариѳм.* § 49).

Слѣдств. III. Изъ тогожъ слѣдуетъ, что высоты BO и BP (*фиг.* 103) подобныхъ треугольниковъ DBH и ABC, содержится какъ ихъ основанія, или какъ сходственные бока; ибо треугольникъ DBO подобенъ треугольнику ABP; потому что уголъ D=∠A по положенію, уголъ DOB=ABP прямые, и уголъ DBO=ABP (§ 48. *Слѣд.* 3); то для подобія оныхъ будетъ BO:BP=BD:AB; а для подобія треугольниковъ DBH и ABC будетъ DH:AC=BD:AB; и для равенства послѣднихъ содержаній, произойдетъ слѣдующая пропорція: BO:BP=DH:AC.

§ 118. ТЕОРЕМА. *Когда въ треугольникахъ* DBH *и* ABC *уголъ* B=∠B *и бока составляющіе равные углы пропорціональны, то есть ежели* DB:AB=BH:BC; *то такіе треугольники будутъ подобны.* Фиг. 103.

Доказ. Положа бокъ BD на бокъ AB, и проведя линѣю DK параллельно къ AC, треугольники ABC и DBK будутъ подобны (§ 116), для подобія которыхъ будетъ DB:AB=BK:BC (§ 117); но BD:AB=BH:BC по положенію; то для равенства первыхъ содержаній, будетъ BK:BC=BH:BC; но какъ въ сей пропорціи BC=BC, слѣдовательно BK=BH (*Ариѳм.* § 125); по сему треугольникъ BDK равенъ треуголь-

нику BDH (§ 26). Но треугольникъ DBK подобенъ ABC, слѣдовательно и треугольникъ BDH подобенъ треугольнику ABC.

§ 119. ТЕОРЕМА. *Ежели всѣ бока треугольника BDH пропорціональны бокамъ другаго треугольника ABC, то есть когда* BD : AB = BH : BC = DH : AC, *то такіе треугольники будутъ подобны.* Фиг. 103.

Доказ. Положа бокъ BD треугольника DBH на бокъ BA, проведи линѣю DK параллельно къ AC, будетъ треугольникъ BDK подобенъ ABC (§ 116), для подобія коихъ будетъ BD : AB = BK : BC (§ 117); но BD : AB = BH : BC по положенію, по сему BK : BC = BH : BC (*Ариѳм.* § 119); но BC = BC, слѣдовательно BK = BH (*Ариѳм.* § 125); также BD : AB = DK : AC (§ 117); но BD : AB = DH : AC по положенію; то для равенства содержаній будетъ DK : AC = DH : AC (*Ариѳм.* § 119); но AC = AC, по сему DK = DH, и для того треугольникъ DBH = DBK (§ 29); треугольникъ же BGK подобенъ ABC, слѣдовательно и DBH подобенъ треугольнику ABC.

§ 120. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ треугольникѣ* ABC, *когда уголъ* CBA *раздѣлится на двѣ равныя части линѣею* BE, *то оная разрѣжетъ противулежащій бокъ* AC *на двѣ части* CE *и* AE, *соразмѣрно сходственнымъ бокамъ* CB *и* AB, *то есть будетъ* CB : BA = CE : AE. Фиг. 105.

Доказ. Продолжа BC, сдѣлай BD = AB, точки A и D соедини прямою линѣею AD, будетъ уголъ BAD = ADB (§ 28), уголъ ABC = BAD + ADB (§ 48. *Слѣд.* 1); по сему $\frac{1}{2}$ угла ABC, то есть уголъ EBC = ADB; а потому линѣя AD параллельна къ BE (§ 44. *Слѣд.* 1), и уголъ CEB = CAD (§ 48. *Слѣд.* 1); слѣдовательно тре-

угольники ЕСВ и ACD, имѣющіе общій уголъ С, между собою подобны (§ 116), и потому ВС: BD или АВ=ЕС:АЕ (§ 117. *Слѣд.* 1).

Слѣдств. Изъ предписанной пропорціи выдетъ еще слѣдующая: ВС+АВ:ЕС+АЕ или АС=ВС;ЕС=АВ:АЕ (*Ариѳм.* § 118), то есть сумма двухъ боковъ ВС+АВ содержится къ основанію АС, какъ каждой бокъ ВС и АВ къ сходственнымъ отрѣзкамъ СЕ и АЕ основанія АС.

§ 191. ТЕОРЕМА. *Въ прямоугольномъ треугольникѣ* АВС, *когда изъ прямаго угла* В *на діогональ* АС *опустится перпендикуляръ* ВМ, *то оной будетъ средняя пропорціональная между отрѣзками* АМ *и* МС, *и каждой бокъ* АВ *и* ВС *изъ составляющихъ прямой уголъ* В *есть средняя пропорціональная между діогональю* АС *и сходственнымъ отрѣзкомъ* АМ *и* МС *діогонали* АС. (Фиг. 106.

Доказ Ибо уголъ МВС+МСВ=90 град. и уголъ АВМ+ВМС=90 град. (§ 48. *Слѣд* 4); по сему уголъ NCB=АВМ (*Ариѳм.* § 32), уголъ АМВ=ВМС прямые, и уголъ МАВ=МВС (§ 48. *Слѣд.* 3); слѣдовательно треугольникъ АМВ подобенъ △МВС. Также треугольникъ АМВ подобенъ АВС; поелику уголъ А общій, уголъ АМВ=АВС прямые, уголъ АМВ=АСВ (§ 48. *Слѣд.* 3). Наконецъ треугольникъ АВС подобенъ ВМС; ибо уголъ ВМС=АВС прямые, уголъ АСВ есть общій, и уголъ МВС=САВ. И такъ 1) для подобія треугольниковъ АМВ и МВС, будетъ АМ:ВМ=ВМ:МС, то есть ÷АМ:ВМ:МС. 2) Для подобія треугольниковъ АМВ и АВС, будетъ АМ:АВ=АВ:АС, то есть ÷АМ:АВ:АС. 3) Для подобія тре-

угольниковъ ABC и BMC, будетъ NC : BC = BC : AC, то есть ∺ MC : BC : AC, слѣдовательно показанныя линѣи находятся въ помянутой пропорціи (§ 115).

§ 122. ЗАДАЧА. *Къ тремъ даннымъ линѣямъ A, B и C найти четвертую пропорціональную большую.* Фиг. 107.

Рѣшен. Сдѣлай произвольной уголъ HDG, отъ верьха D положи DE = A, EG = B, DF = C; потомъ точки E и F соедини прямою линѣею EF; а изъ точки G проведи GH параллельно къ EF, то линѣя EH будетъ четвертая пропорціональная.

Доказ. Поелику EF параллельна къ линѣи GH, то треугольникъ DEF будетъ подобенъ △DGH (§ 116); и для того будетъ DE : FG = DF : FH (§ 117), то есть A : B = C : FH; слѣдовательно FH есть четвертая пропорціональная (§ 115).

§ 123. ЗАДАЧА. *Къ двумъ даннымъ линѣямъ A и C, найти третью пропорціональную линѣю меньшую.* Фиг. 108.

Рѣшен. Сдѣлай произвольной уголъ HEI, отъ верха E положи линѣю EF равну данной большой A, отъ F линѣю FI равну меньшой C и EG = C, точки F и G соедини прямою линѣею GF; а изъ I проведи линѣю IH параллельно къ GF, будетъ GH требуемая третья пропорціональная.

Доказ. Поелику FG параллельна къ HI, то будетъ треугольникъ EGF подобенъ EIH (§ 116); и для того EF : FI = FG : GH, то есть A : C = C : GH (§ 117. *Слѣд.* 1), или ∺ A : C : GH;

слѣдственно GH есть третья пропорціональная линѣя.

Другимъ образомъ. Проведя произвольной величины линѣю CA (*фиг.* 106), положи отъ C до M линѣю равну данной A; изъ точки M поставь перпендикуляръ MB = данной C; потомъ соединя точки C и B прямою линѣею BC, поставь на концѣ B перпендикуляръ BA до пресѣченія съ линѣею CA въ точкѣ A, тогда AM будетъ третья пропорціональная; ибо CM:MB = MB:MA (§ 121), т. е. ∺A:C:MA.

§ 124. ЗАДАЧА. *Къ даннымъ двумъ линѣямъ B и A найти четвертую пропорціональную линѣю Геометрической прогрессіи.* (Фиг. 109.

Рѣшен. Сдѣлай по изволенію уголъ ICF, отъ верха онаго положи CD равну большой данной линѣи B, CG = A и DE = A; изъ точки E проведи EH параллельно къ GD, то будетъ GH третья пропорціональная (§ 123); потомъ сдѣлавъ EF = GH, проведи изъ F линѣю FI параллельно къ HE, то линѣя HI будетъ требуемая четвертая пропорціональная.

Доказ. Въ треугольникѣ CFI линѣи GD, HE и IF параллельны между собою по рѣшенію; а потому будетъ CD:DE = CG:GH, также DE:EF = GH:HI (§ 117. *Слѣд.* 2); но поелику DE = G и EF = GH по положенію; и такъ поставя въ первой пропорціи CG вмѣсто DF, а во второй пропорціи CG вмѣсто DE и GH вмѣсто EF, будетъ въ первой CD:CG = CG:GH, а во второй CG:GH = GH:HI, и для равенства содержаній будетъ CD:CG = CG:GH = GH HI; по сему произойдетъ непрерывная пропорція ∺CD:CG:GH:HI или ∺B:A:GH:IH;

слѣдовательно HI есть четвертая пропорціональная.

§ 125. ЗАДАЧА. *Между двухъ данныхъ линѣй AB и CD найти среднюю Геометрическую линѣю.* Фиг. 110.

Рѣшен. I. Проведя произвольную линѣю EF, и положа на ней EG=AB и GF=CD, опиши на линѣи EF полукружіе; потомъ изъ точки G, ихъ соединеніи, поставь перпендикуляръ GH (§ 38), которой будетъ средняя пропорціональная между данными AB и CD.

Рѣшен. II. Проведя линѣю EF=CD, опиши на ней полкруга; положи FG=AB; потомъ изъ точки G поставя перпендикуляръ GH, проведи хорду EH, то оная будетъ средняя пропорціональная между данными AB и CD.

Доказ. Поелику въ треугольникѣ EHF уголъ EHF надъ діаметромъ EF есть прямой (§ 71. *Слѣд.* 2), и линѣя HG перпендикулярна къ EF, то по § 121му будетъ треугольникъ EGH подобенъ △HGF и подобенъ △EFH; и для того будетъ: 1) EG : GH = GH : GF; но EG=AB, GF=CD, по сему будетъ AB : GH = GH : CD. 2) EG : EH = EH : EF, то есть AB : EH = EH : CD; слѣдовательно въ первомъ случаѣ GH, а во второмъ EH есть средняя пропорціональная между данными AB и CD.

§ 126. ЗАДАЧА. *Линѣю AB раздѣлить такъ въ пропорціональныя части, какъ другая CD раздѣлена въ точкахъ E и I.* Фиг. 111.

Рѣшен. У точки C, раздѣленной линѣи CD, сдѣлай по соизволенію уголъ GCD. Отъ верха C положи до G линѣю CG = данной AB, точки G и D соедини прямою линѣею GD; потомъ

изъ точекъ E и I проведи EF и IH параллельно къ DG, тогда линѣя CG равная данной AB, раздѣлится такъ въ пропорціональныя части, какъ раздѣлена CD.

Доказ. Ибо въ треугольникѣ CDG линѣи IH, EF параллельны къ DG; и для того будетъ CI : IE = CH : HF и IE : ED = FH : FG; изъ сихъ пропорцій удобно можно видѣть, что части CH : HF : FG линѣи CG (которая равна данной AB), имѣютъ такоежъ содержаніе, какое и части CI : EI : ED линѣи CD.

§ 197. ЗАДАЧА. *Данную линѣю AB раздѣлить въ содержаніе чиселъ* 3 : 5 : 2. (Фиг. 112.

Рѣшен. У точки A данной линѣи AB, сдѣлай по соизволенію уголъ BAC; отъ верха A на линѣѣ AC положи произвольной величины равныхъ частей 3 = AE, 5 = ED, 2 = DC; потомъ точки B и C соедини прямою линѣею BC, изъ точекъ D и E проведи DF и EG параллельно къ BC, при чемъ линѣя AB раздѣлится въ требуемыя пропорціональныя части.

Доказ. Повлику въ треугольникѣ ABC, линѣи EG и DF параллельны къ BC, и для того будетъ AG : GF = AE : ED = 3 : 5, также GF : FB = ED : DC = 5 : 2 (§ 117. *Слѣд.* 2); по сему AG : GF : FB = 3 : 5 : 2; слѣдовательно линѣя AB раздѣлена въ требуемомъ содержаніи чиселъ.

§ 198. ЗАДАЧА. *Отъ данной линѣи AB отдѣлить* $\frac{4}{7}$. Фиг. 113.

Рѣщен. У точки A сдѣлай произвольной величины уголъ BAE. Отъ верха A по линѣѣ AE положи произвольной величины семь равныхъ частей; точки B и E соедини прямою линѣею BE, и отсчитавъ отъ A до D 4 ча-

сти$=$AD, изъ точки D проведи линѣю DC параллельно къ BE, которая отъ линѣи AB отдѣлитъ линѣю AC$=\frac{4}{7}$AB.

Доказ. Поелику DC параллельна къ BE по рѣшенію, то будетъ AD : AE$=$AC : AB (§ 117); но какъ AD$=\frac{4}{7}$AE, слѣдовательно и AC$=\frac{4}{7}$AB.

§ 129. ЗАДАЧА. *Начертить размѣръ Геометрической.*

Рѣшен. I. Взявши циркулемъ произвольную часть за сажень, футъ или дюймъ, положи оную на проведенной линѣи AB отъ A до C десять разъ; потомъ величину линѣи AC положи отъ C до B столько разъ, сколько будетъ потребно; напослѣдокъ проведя другую параллельную линѣю къ AB въ произвольномъ разстояніи, и означивъ мѣру десятковъ числами, будешь имѣть Геометрическій размѣръ въ однихъ только саженяхъ, футахъ, или дюймахъ. *Фиг.* 114.

Рѣшен. II. Для начертанія Геометрическаго размѣра, содержащаго въ себѣ сажени, футы и дюймы вмѣстѣ, надлежитъ, проведя прямую линѣю AC, положить на ней отъ A до B (*фиг.* 115) десять произвольныхъ равныхъ частей; потомъ положа величину линѣи AB отъ B до C столько разъ, сколько будетъ потребно, поставь изъ точекъ A и C перпендикуляры AD и CF, изъ коихъ на первомъ AD положа произвольной же величины десять ровныхъ частей AI, 1.2, 2.3 и проч., изъ каждой точки 1, 2, 3, 4 и проч., проведи параллельныя линѣи къ AC до перпендикуляра CF, и соединя точки 9 и D прямою линѣею 9D, изъ каждой точки 8, 7, 6 и проч., проведи

линѣи 8z, 7y, 6x и 8S параллельно къ 9D; наконецъ изъ точекъ B, P и проч. поставь перпендикуляры BE, PP и проч., то получится Геометрической размѣръ, на которомъ ежели AB означать будетъ сажень Геометрическую, то B1, 1.2, 2.3 и проч. будутъ означать футы; n1 будетъ означать одинъ дюймъ, 2h два дюйма, 3k три дюйма и такъ далѣе. Но естьли AB означать будетъ 10 саженей, то B1, 1.2, 2.3 и проч. будетъ означать сажени; а 1n одинъ футъ, 2h два фута, 3k три фута и такъ далѣе. Естьли же AB возьмется за 100 саженъ, то B1, 1.2, 2.3 и проч. будетъ означать 10 саженей, а 1n одну саж., 2h двѣ саж., 3k три саж. и такъ далѣе.

Доказ. Поелику 1n, 2h, 3k и проч. параллельны линѣѣ SE, то будетъ BE:BI=SE:1n, но BI$=\frac{1}{10}$BE; по сему 1n будетъ$=\frac{1}{10}$SE. Равнымъ образомъ докажется, что 2h$=\frac{2}{10}$SE, 3k $=\frac{3}{10}$SE и такъ далѣе; слѣдовательно ежели AB будетъ означать сажень, то каждая изъ равныхъ по положенію частей B1, 1.2, 2.3 и проч. будутъ футы, а 1n будетъ одинъ дюймъ, 2h два дюйма, 3k три дюйма и такъ далѣе; тожъ должно разумѣть и въ такомъ случаѣ, когда AB будетъ означать 10 или 100 саженъ, то 1n будетъ означать въ первомъ случаѣ 1 футъ, и въ другомъ 1 саж.; но ежели AB будетъ означать футъ, то BI, 1.2, 2.3 и проч., будутъ дюймы: 1n одна линѣя, 2h двѣ линѣи, 3k три линѣи и такъ далѣе.

Примѣч. I. Ежели случится дѣлать размѣръ не по Геометрической, но по какой ни есть другой мѣрѣ, *на прим.* по Россійской обыкновенной, то на

линѣи AB надлежитъ положить семь, а на перпендикулярѣ AD двенадцать равныхъ частей; для того, что Россійская сажень раздѣляется на 7 футовъ, а футъ на 12 дюймовъ; поступая впрочемъ по предписанному, начертится размѣръ обыкновенной Россійской мѣры. По сему должно разсуждать и о прочихъ мѣрахъ, смотря по раздѣленію оныхъ.

Примѣч. II. Касательно до употребленія помянутаго размѣра, то по оному вымѣряются линѣи, или бока данной прямолинѣйной плоскости; *на прим.* когда надлежитъ данную линѣю вымѣрять по размѣру, то взявъ величину оной циркулемъ, положи раствореніе его на размѣръ AF такимъ образомъ, чтобъ одна нога циркула находилась на перпендикулярѣ CF, а другая на показанныхъ на размѣрѣ дюймахъ. Положимъ, что раствореніе циркула равное вымѣрянной линѣи ляжетъ отъ *n* до *q*, то считай сколько *n* до *q* саженъ, футовъ и дюймовъ; но поелику линѣя *nq* представляетъ на размѣрѣ 2 сажени, 4 фута и 6 дюймовъ; слѣдственно вымѣренная линѣя въ первомъ случаѣ будетъ означать 2°, $4'$, $6''$; во второмъ 24°, $6'$; въ третьемъ 246 саженъ.

§ 130. ЗАДАЧА. *Въ треугольникѣ* DAE *линѣя* BC *параллельна основанію* DE, *извѣстны части* $AB=50'$, $BD=20'$, $AC=40'$, $BC=60'$, *найти часть* EC *и основаніе* DE. (Фиг. 116.

Рѣшен. Поелику треугольникъ ABC подобенъ ADE, то будетъ содержаться AB къ AD какъ BC къ DE (§ 117), также содержится AB къ BD какъ AC къ CE (§ 117. *Слѣд.* 1). И такъ $50'+20'=70'=AB+BD=AD$, и для того будетъ $AB:AD=BC:DE$, и $AB:BD=AC:EC$, т. е. $50':70'=60':84'$, и $50':20'=40':16'=EC$.

§ 131. ЗАДАЧА. *Въ треугольникѣ* ADE *линѣя* BC *параллельна къ* DE, *извѣстны* $AD=70'$,

BC=60′, CE=16′, DE=84′, *найти части* AB, BD *и* AC. Фиг. 116.

Рѣшен. Для подобія треугольниковъ ABC и ADE, будетъ DE : BC=AD : AB, то есть 84′ : 60′ =70′ : 50′=AB, и AD−AB=BD=70′−50′=20′; потомъ DB : AB=CE : AC, то есть 20′ : 50′= 16′ : 40′=AC.

§ 132. ЗАДАЧА. *Въ подобныхъ треугольникахъ* ABC *и* ADE *извѣстны* AC=40′, CE=16′, AB=50′, DE=84′, *сыскать* BD *и* BC. Фиг. 116.

Рѣшен. Поелику треугольникъ ABC подобенъ ADE, по сей причинѣ произойдетъ слѣдующая пропорція: AE : AC=DE : BC, также и AC : CF=AB : BD (§ 117. *Слѣд.* 1), т. е. 56′ : 40′ = 84′ : 60′=BC, и 40′ : 16′=50′ : 20′=BD.

§ 133. ЗАДАЧА. *Трапеціи* DBCE *извѣстны, бока* DE=84′, BC=60′, BD=20′, CE=16′, *найти дополненія* AB *и* AC *продолженныхъ ея боковъ.* Фиг. 116.

Рѣшен. Изъ точки C проведи линѣю CF параллельно къ боку BD, продолжи DB и EC, пока пересѣкутся въ точкѣ A; причемъ будетъ CF=BD, BC=DF (§ 45); а когда изъ DE вычтется DF, то останется EF, и для подобія треугольниковъ EFC и BCA произойдетъ слѣдующая пропорція: EF : BC=EC : AC, также EF : BC=CF : AB, то есть 84′−60′=24′=AE−DE=EF, и слѣдовательно 24′ : 60′=16′ : 40′=AC и 24′ : 60′=20′ : 50′=AB.

§ 134. ЗАДАЧА. *Въ двухъ прямоугольныхъ треугольникахъ* AED *и* BCE, *извѣстны перпендикуляры* BC=84′, AD=60′ *и сумма основаній* AE+BE=AB=120′, *найти* BE *и* AE. Фиг. 117.

Рѣшен. Проведи DF параллельно къ AB, пока пересѣчется съ продолженною CB въ точ-

къ F, то будетъ AD=BF и AB=DE (§ 45); и для подобія треугольниковъ DCF и BEC будетъ CB+BF, или CF:BC=DF, или AB:BE, то есть, какъ сумма перпендикуляровъ CB+AD содержится къ одному BC, такъ сумма основаній AE+BE къ основанію BE, которое вычтя изъ AB, получится AE; и такъ будетъ 60′+84′=144′=CB+AD=CB+BF=CF; потомъ CF : BC=DF : BE, то есть 144 : 84=120 : 70=BE; и наконецъ 120—70=50=AB—BE=AE. Справедливость сего рѣшенія видна изъ § 117.

§ 135. ЗАДАЧА. *Въ двухъ подобныхъ треугольникахъ* ABC *и* ADE *извѣстны; въ треугольникѣ* ADE *сумма боковъ* AD+DE+AE=210′, *и бока* AB=40′, BC=60′, AC=50′ *треугольника* ABC; *найти бока* AD, AE, ED *треугольника* ADE. Фиг. 116.

Рѣшен. Сложа извѣстные бока AB, BC и AC треугольника ABC, сдѣлай пропорцію: какъ сумма боковъ треугольника ABC содержится къ суммѣ боковъ треугольника DAE, такъ основаніе BC къ основанію DE, то есть AB+BC+AC : AD+DE+AE=BC : DE; потомъ будетъ BC : DE=AB : AD, и наконецъ BC : DE=AC : AE, то есть будетъ 60′+50′+40′=150′=BC+AB+AC, и для того будетъ 150′ : 210′=60′ : 84′=DE, и 60′ : 84′=40′ : 56′=AD. И наконецъ, 60′ : 84=50′ : 70′=AE; по сему 70′—50′=20′=AE—AC=CE, и 56′—40′=16′=AD—AB=BD.

Доказ. Поелику AB : AD=AC : AE=BC : DE (§ 117), по сей причинѣ AB+AC+BC : AD+AE+DE=BC : ED (*Ариѳм.* § 131). Истиннажъ прочихъ пропорцій видна изъ § 117.

§ 136. ЗАДАЧА. *Въ треугольникѣ* ABC, *уголъ* ABC *линѣею* BE *раздѣленъ на двѣ равныя части: извѣстна сумма боковъ* AB+BC=144' *и части основанія* AE=50' *и* EC=70', *найти величину боковъ* AB *и* BC. Фиг. 105.

Рѣшен. Сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ основаніе AC содержится къ отрѣзку EC, такъ сумма боковъ AB+BC къ боку BC, которой вычти изъ суммы боковъ AB+BC, получишь бокъ AB. И такъ 50'+70'=120'=AE+EC=AC, и для того будетъ 120':70'=144': 84'=BC, а наконецъ 144'—84'=60'=AB.

Доказательство смотри въ § 120.

§ 137. ЗАДАЧА. *Въ данномъ кругѣ* DEF *начертить треугольникъ подобенъ данному* ABC. Фиг. 118.

Рѣшен. Проведя въ данномъ кругѣ произвольно хорду ED, и сдѣлавъ уголъ DEF= углу ABC (§ 34), проведи хорду DF; потомъ сдѣлай уголъ DFG=∠CAB даннаго треугольника AB; наконецъ точки G и D соедини прямою линѣею DG, тогда произойдетъ треугольникъ DGF подобенъ данному ABC.

Доказ. Ибо уголъ CAB=DFG, и уголъ ABC =DEF по рѣшенію; но уголъ DEF=DGF (§ 71. *Слѣд.* 1), по сему и уголъ ACB=GDF (§ 48. *Слѣд.* 3), слѣдовательно треугольникъ ABC подобенъ DGF (§ 116).

§ 138. ЗАДАЧА. *Около даннаго круга* LGI, *начертить треугольникъ подобенъ данному* ABC. Фиг. 119.

Рѣшен. Основаніе AC, треугольника ABC, продолжа въ обѣ стороны до *m* и *d*, и сыскавъ центръ круга E (§ 60), проведи радіусъ EG; сдѣлай уголъ GEI=*d*CB, уголъ GEL=*m*AB

(§ 34); потомъ чрезъ точки G, I и L проведи линѣи FH, KH и KF перпендикулярно къ радіусамъ EG, EI, EL (§ 50), кои взаимно пересѣкшись въ точкахъ F, H и K, изобразятъ треугольникъ FHK, подобенъ данному ABC.

Доказ. Поелику въ четвероугольникѣ GEIH углы GIH и EGH прямые по рѣшенію, то будетъ уголъ GEI+GHI=180° (§ 85. *Приб.* 1); также уголъ *a*CB+ACB=180° (§ 17); по сему уголъ GEI+GHI=*a*CB+ACB; но уголъ GEI=*a*CB по положенію; слѣдовательно уголъ GHI =ACB. Подобнымъ образомъ докажется, что уголъ GFL=CAB и уголъ FKH=углу ABC (§ 48. *Слѣд.* 3).

§ 139. *Опредѣл.* Ежели какая нибудь линѣя раздѣлится на двѣ части такъ, что одна часть будетъ средняя пропорціональная между другою частію и цѣлою линѣею, тогда говорится, что оная линѣя раздѣлена *по наружной посредственной пропорціи.*

§ 140. ЗАДАЧА. *Данную линѣю* AB *раздѣлить по наружной посредственной пропорціи.* Фиг. 120 *и* 121.

Рѣшен. Изъ точки B на концѣ линѣи AB поставь перпендикуляръ BC=AB (*фиг.* 120), раздѣли AB на двѣ равныя части въ точкѣ D, точки D и C соедини прямою линѣею DC. Изъ точки D радіусомъ DC опиши дугу CF, пока съ продолженною AB пересѣчется въ точкѣ F; потомъ изъ точки B радіусомъ BF опиши дугу FM, которая перпендикулярную BC=AB раздѣлитъ въ точкѣ M по наружной посредственной пропорціи такъ, что будетъ MC : BM =BM : BC.

Доказ. Изъ точки D радіусомъ DC опиши дугу FCK, пока продолженное AB пересѣчется въ точкѣ K, при чемъ будетъ AF=BK; ибо DF=KD радіусы, и DB=AD по рѣшенію, слѣдовательно DF+AD=KD+DB, то есть BK=AF; но поелику BF : BC=BC : BK (§ 125), то поставя въ сей пропорціи AF на мѣсто KB и BM на мѣсто BF, будетъ BM : BC=BC : AF; а изъ сей пропорціи выдетъ слѣдующая: BC —BM : AF—BC=BM : BC (*Ариѳм.* § 118); но какъ BC—BM=CM, и AF—BC=AF—AB=BF=BM; по сему MC : BM=BM : BC; слѣдовательно линѣя BC, равная данной AB, раздѣлена въ точкѣ M по наружной посредственной пропорціи.

Другимъ образомъ. Изъ точки B, на концѣ данной линѣи AB (*фиг.* 121), поставь перпендикулярную BC=$\frac{1}{2}$AB; потомъ изъ точки C радіусомъ BC опиши кругъ BDE; чрезъ точку A и центръ круга C проведи линѣю AD; напослѣдокъ сдѣлай AF=AE; при чемъ линѣя AB въ точкѣ F, раздѣлится по наружной посредственной пропорціи такъ, что будетъ AB : AF=AF : FB.

Доказ. Треугольникъ AEB подобенъ ΔADB, потому что уголъ BAD общій, уголъ ABE=∠ADB, измѣряются половиною дуги BE (§ 79 и 71), по сему и уголъ AEB=∠ABD (§ 48. *Слѣд.* 3), и для того будетъ AE : AB=AB : AD (§ 117), также AB—AF : AD—AB=AE : AB (*Ариѳм.* § 118); но AB=ED и AF=AE по рѣшенію; чего ради будетъ AB-AF : AD—ED=AF : AB, то есть BF : AE или AF : AB.

Слѣдств. Изъ перваго доказательства видно, что BK : BC = BC : BF (§ 125) ; но BK = AF и BC = AB ; то будетъ AF : AB = AB : BF ; слѣдовательно линѣя AF въ точкѣ B раздѣлена по наружной посредственной пропорціи. Тожъ самое видно изъ втораго доказательства, что AE : AB или ED = AB или ED : AD ; по сему и AD въ точкѣ E раздѣлена по наружной посредственной пропорціи.

§ 141. ТЕОРЕМА. *Ежели радіусъ* BC *круга* BEA, *раздѣлится по наружной посредственной пропорціи, то средняя будетъ равна боку правильнаго десяти-угольника вписаннаго въ томъ же кругѣ.* Фиг. 122.

Доказ. Положимъ, что хорда AB равна боку десяти-угольника, то уголъ ACB при центрѣ будетъ имѣть 36 град. (§ 101. *Слѣд.* 2); по сему каждой уголъ CAB и ABC равенъ $\frac{180-36}{2}$ = 72° (§ 101. *Слѣд.* 2). И такъ раздѣля уголъ BAC на двѣ равныя части линѣею AD, треугольникъ ADB будетъ подобенъ ABC. Ибо уголъ DAB = $\frac{72}{2}$ = 36° = ∠ACB, уголъ ABC общій; по сему и уголъ ADB = BAC (§ 48. *Слѣд.* 3); и для того будетъ DB : AB = AB : BC (§ 117); но уголъ CAB = ABC = ADB, и уголъ DAB = DAC = ACB = 36° ; по сему и бокъ AB = AD = CD (§ 51). И такъ поставя CD вмѣсто AB, будетъ DB : CD = CD : BC ; слѣдовательно радіусъ BC линѣею AD раздѣленъ въ точкѣ D по наружной посредственной пропорціи (§ 140), и средняя CD равна боку AB десяти-угольника вписаннаго въ кругѣ.

Слѣдств. Ежели какая нибудь линѣя раздѣлится по наружной посредственной пропор-

ціи, и начертится равнобедренный треугольникъ такимъ образомъ, что средняя возмется за основаніе, а вся линѣя за наклоненной бокъ, то каждой уголъ при основаніи будетъ вдвое больше верхняго угла.

§ 142. ЗАДАЧА. *Въ данномъ кругѣ ADCA начертить правильной пяти- и десяти-угольникъ.* Фиг. 123.

Рѣшен. Раздѣля радіусъ BF по наружной посредственной пропорціи въ точкѣ I (§ 140), средняя BI будетъ равна боку десяти-угольника (§ 141); потомъ изъ точки B радіусомъ BI опиши дугу CID, точки D и C соедини прямою линѣею CD, то оная будетъ равна боку пяти-угольника; а хорда BD=BC=BI будетъ бокъ десяти-угольника. И такъ положа показанныя линѣи по окружности даннаго круга, изобразятся требуемые многоугольники.

Доказ. Поелику средняя BI=BC=BD равна боку десяти-угольника (§ 141); по сему дуга CB=BD=$\frac{1}{10}$ части окружности, слѣдовательно дуга CBD=$\frac{2}{10}$=$\frac{1}{5}$ части окружности, и хорда CD есть бокъ пяти-угольника.

§ 143. ЗАДАЧА. *На данной линѣи AB начертить правильной пяти-и десяти-угольникъ.* Фиг. 124.

Рѣшен. На концѣ данной линѣи AB поставь перпендикуляръ BE=AB, раздѣли AB въ точкѣ D пополамъ, проведи DE, изъ точки D радіусомъ DE опиши дугу EC, которая съ продолженною AB пересѣчется въ точкѣ C. На основаніи AB начерти равнобедреный треугольникъ, котораго бы бока AG и BG равны были AC. Около сего треугольника опиши

кругъ (§ 64), по окружности котораго линѣя AB положится пять разъ, и чрезъ то начертится правильной пяти-угольникъ ABFGH. Для начертанія же на данной линѣи AB правильнаго десяти-угольника, изъ верха G радіусомъ GA или GB опиши кругъ ALKB, по окружности котораго данной бокъ AB положится десять разъ, и чрезъ то изобразится правильной десяти-угольникъ.

Доказ. Поелику AC равная AG раздѣлена въ точкѣ B по наружной посредственной пропорціи (§ 140. *Слѣд.*), и AB есть средняя пропорціональная между AC и BC; по сему равнобедренный треугольникъ ABG есть такой, котораго равные углы BAG и ABG при основаніи вдвое верхняго угла AGB (§ 141. *Слѣд.*); слѣдовательно уголъ AGB=36 град. и уголъ AMB при центрѣ=72 град. (§ 71. *Слѣд.* 1); по сему дуга AB измѣряющая уголъ AMB=$\frac{1}{5}$ части, а дуга AHGFB=$\frac{4}{5}$ окружности; слѣдовательно данная линѣя AB какъ на дугѣ AHG, такъ и на дугѣ GFB положится два раза, а по всей окружности ABFGH пять разъ; и слѣдовательно многоугольникъ ABFGH, есть правильной пяти-угольникъ. Но какъ уголъ AGB=36 град.; по сему дуга AB есть десятая часть окружности круга ABIKL, слѣдовательно данная AB, положится по окружности онаго десять разъ, и многоугольникъ ABIKL есть правильной десяти-угольникъ.

Слѣдств. I. Когда изъ верха G правильнаго пяти-угольника ABFGH проведутся діогонали AG и BG, то произойдетъ равнобедрен-

ный треугольникъ ABG, котораго уголъ GAB или ABG при основаніи вдвое верхняго угла AGB; ибо уголъ AMB при центрѣ всякаго правильнаго пяти-угольника=72 град.; по сему уголъ AGB=36 град.; слѣдовательно уголъ GAB$=\frac{1}{2}(180-36)=72$ град. будетъ вдвое больше AGB.

Слѣдств. II. Изъ предыдущей теоремы и задачи явствуетъ, когда діогональ AG равная AC правильнаго пяти-угольника, раздѣлится по наружной посредственной пропорціи, то средняя будетъ равна боку AB пяти-угольника ABFGH.

§ 144. ТЕОРЕМА. *Въ правильномъ пяти-угольникѣ* ABFGH, *діогональ* AG *есть средняя пропорціональная между бокомъ* AB *и суммою ихъ* AB+AG. (Фиг. 124.

Доказ Поелику AC=AG, и притомъ BC:AB=AB:AC или AG (§ 140. *Слѣд.*); по сей причинѣ AB:BC+AB=AC:AB+AC (*Ариѳм.* § 118); но BC+AB=AC=AG, слѣдовательно AB:AG=AG:AB+AG, то есть діогональ AG есть средняя пропорціональная между бокомъ AB и суммою діогонали AG съ бокомъ AB.

Слѣдств. Изъ сего видно, когда какая нибудь линѣя раздѣлится по наружной посредственной пропорціи, то средняя будетъ діогональ, а меньшая бокъ правильнаго пяти-угольника.

§ 145. ЗАДАЧА. *Въ данномъ кругѣ начертить правильной пяти-угольникъ.* (Фиг. 125.

Рѣшен. Начертя въ кругѣ равносторонный треугольникъ ABC (§ 104) и правильной пяти-угольникъ CDEFH (§ 142), проведи хорду AE,

то оная будетъ бокъ требуемаго пятнадцати-угольника.

Доказ. Поелику дуга CDA$=\frac{1}{3}$ окружности, а дуга CDF$=\frac{2}{5}$ окружности круга по рѣшенiю; но $\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$, т. е. дуга AE$=\frac{1}{15}$ части окружности круга; слѣдовательно хорда AE есть бокъ пятнадцати-угольника (§ 99. *Слѣд.* 2).

О соразмѣрности линѣй въ подобныхъ многоугольникахъ и кругахъ.

§ 146. *Опредѣл.* *Подобные* многоугольники EFK и MNR называются тѣ, кои будучи раздѣлены одинакимъ образомъ на треугольники, и оные треугольники какъ на прим. EFQ, EQL и проч. одного многоугольника EFK, подобны сходственнымъ треугольникамъ MNO, MOS и проч. другаго многоугольника MNR. *Фиг.* 126.

§ 147. *Опредѣл.* *Секторъ* или *вырѣзокъ* круга есть пространство, опредѣленное двумя радiусами круга AF и AE и частью FxE окужности. *Фиг.* 128.

§ 148. *Опредѣл.* *Подобные вырѣзки круга* суть тѣ, коихъ углы EAF и FEM заключающiеся радiусами равны. *Фиг.* 128.

§ 149. ЗАДАЧА. *Начертить многоугольникъ равенъ и подобенъ данному* ABDFGC. *Фиг.* 127.

Рѣшен. Данной многоугольникъ ABDFGC сперва раздѣли произвольнымъ образомъ на треугольники, линѣями изъ одного угла въ другой проведенными, какъ то изъ начертанiя видно; потомъ проведя линѣю EF$=$AB, сдѣлай на оной треугольникъ EFQ$=$ABD (§ 33), на линѣи EQ треугольникъ EQL$=$ADC, на ли-

нѣи LQ треугольникъ LQK=CDG; также на линѣи KQ треугольникъ KQI=DGF, при чемъ произойдетъ многоугольникъ EFQIKL равенъ и подобенъ данному ABDFGC.

Доказ. Поелику треугольники даннаго многоугольника равны и подобны сходственнымъ треугольникамъ начерченнаго многоугольника по рѣшенію; по сей причинѣ многоугольникъ ABDFGC (§ 146).

§ 150. ЗАДАЧА. *На данной линѣи* MN *начертить многоугольникъ подобенъ данному* EFQIKL. Фиг. 126.

Рѣшен. Раздѣля данной многоугольникъ какъ и прежде на треугольники (§ 149), сдѣлай у точки M, данной линѣи MN, уголъ NMO=FEQ, у точки N уголъ MNO=EFQ; также у конца линѣи MO сдѣлай уголъ OMS=∠LEQ, а у точки O уголъ MOS=∠EQL; потомъ на линѣи OS такимъ же образомъ сдѣлай треугольникъ OSR подобенъ QLK, и наконецъ начерти на линѣи OR треугольникъ ORT подобенъ QKI (§ 49), тогда изобразится требуемой многоугольникъ.

Доказ. Поелику треугольники даннаго многоугольника EFQIKL подобны сходственнымъ треугольникамъ начерченнаго многоугольника MNOTRS по рѣшенію; слѣдовательно многоугольникъ MNOTRS подобенъ данному (§ 146).

§ 151. ТЕОРЕМА. *Окружности подобныхъ многоугольниковъ* MNOTRS *и* FEQIKL *содержатся между собою какъ сходственныя части* MN *и* EF *или* OM:QE. Фиг. 126.

Доказ. Поелику треугольники многоугольника MNOTRS, подобны треугольникамъ мно-

треугольника EFQIKL; то для подобства треугольниковъ MNO и EQF будетъ NO:FQ=MN:EF=MO:EQ; для подобія треугольниковъ MOS и EQL, MO:EQ=MS:EL=OS:LQ; для подобныхъ треугольниковъ OSR и QLK, будетъ OS:LQ=SR:LK=RO:QK; и наконецъ для подобія треугольниковъ ORT и QKI, будетъ OR:QK=RT:KI=OT:QI (§ 117); и такъ въ разсужденіи равенства содержаній будетъ ON:QF =MN:EF=MS:EL=SR:LK=RT:KI=OT:QI; а для сихъ равныхъ содержаній, будетъ NO+NM+MS+RS+RT+OT : QF+FE+EL+LK+KI+IQ=MN:EF (*Ариѳм.* § 131), т. е. окружность многоугольника NMSRTO къ окружности многоугольника EFQIKL, какъ бокъ MN къ боку EF, или OM:QE и проч.

§ 152. ТЕОРЕМА. *Окружности правильныхъ многоугольниковъ одного числа боковъ, содержатся какъ радіусы, или перпендикуляры отъ центра.* (Фиг. 129.

Доказ. Пусть будутъ правильные пятиугольники BCK и DEL. Сыскавъ оныхъ центры G и F (§ 99. *Слѣд.* 1), и проведя радіусы BG и GC, FD и FE, изъ центровъ G и F опусти перпендикуляры GA и FH, то треугольники BGC и DEF будутъ подобны; ибо уголъ BGC =DFE при центрѣ, также уголъ CBG=EDF и уголъ BCG=DEF каждой равенъ $\frac{1}{2}$ угла окружности. И такъ для подобія треугольниковъ будетъ BC:DE=BG:DF (§ 117); а умножа члены перваго содержанія чрезъ число боковъ, будетъ 5CB:5DE=BG:DF=AG:FH (*Ариѳм.* § 121); то есть окружность пятиугольника BCK къ окружности другаго DEL

какъ радіусъ BG къ DF, или перпендикуляръ AG къ FH.

Слѣдств. I. Изъ сего явствуетъ, что окружности круговъ EDF и BMF (*фиг.* 128), содержатся какъ радіусы AC и EB, или какъ діаметры EC и BM; ибо круги почитать можно подобными правильными многоугольниками, имѣющими безконечное число боковъ, такъ что безконечно малыя части CD и BH окружностей, представляющія бока многоугольниковъ, ничѣмъ не разнятся отъ прямой линѣи. И такъ естьли положимъ число сихъ боковъ, составляющихъ окружности круговъ будетъ N, то проведя радіусы AC и AD, EB и EH, треугольники ACD и EBH будутъ подобны; ибо углы A и E при центрахъ, также и углы C и B, D и H при основаніяхъ равны между собою; и для того будетъ CD : BH = AC : EB; а умножа члены перваго содержанія чрезъ N, будетъ CD×N : BH×N = AC : EB (*Ариѳм.* § 122); но CD×N и BH×N означаютъ суммы боковъ или окружности круговъ, слѣдовательно окружность EDF : MHF = AC : EB, или какъ діаметръ EC къ діаметру BM (*Ариѳм.* § 121 *Слѣд.*).

Слѣдств. II. Въ подобныхъ секторахъ FAE и FEM дуги F*x*E и F*y*M, содержатся между собою какъ радіусы AE и EM, или какъ хорды FE и FM; ибо положимъ, что дуга F*x*E $=\frac{1}{9}$ части окружности EDF; то будетъ и дуга F*y*M $=\frac{1}{9}$ части окружности BMF; но по предыдущему слѣдствію окружность EDF : FMB = AE : EM, по сему $\frac{1}{9}$EDF : $\frac{1}{9}$FMB = AE : EM (*Ариѳм.* § 122), то есть дуга F*x*E : F*y*M = AE : EM; но AE : EM = FE : FM (§ 117); слѣдо-

вательно дуга FxE къ дугѣ FyM, какъ хорда FE къ хордѣ FM.

§ 153. *Опредѣл.* *Элипсисъ* есть пространство на плоскости опредѣленное, такого свойства кривою линѣею, что всякая оной точка, какъ *на прим.* K, N, Q и проч. (*фиг.* 130), опредѣлена перпендикулярно стоящею на оси AB четвертою пропорціональною линѣею IK, NM и проч. сысканною къ большой AB и меньшой оси GH (кои такъ называются) и каждому полупоперешнику IY, MV, PR и проч. круга большой оси AB.

§ 154. ЗАДАЧА. *По даннымъ двумъ осямъ AB и CD начертить элипсисъ.* Фиг. 130.

Рѣшен. Данную AB раздѣля на двѣ равныя части въ точкѣ x, проведи GxH перпендикулярно къ AB, такъ чтобы xH и xG равны были $\frac{1}{2}$CD; потомъ радіусомъ Ax опиши кругъ AEBF; раздѣли Ax на нѣсколько равныхъ частей въ точкахъ I, M, P, S и проч., поставь перпендикуляры IY, MV, PR, ST и проч.; потомъ сыскивай къ осямъ AB, къ GH и къ каждому полупоперешнику круга IY, MV, PR и проч. четвертыя пропорціональныя линѣи IK, NM, PQ, SO и проч. чрезъ точки K, N и проч. сихъ линѣй, проведи искусно рукою линѣи HKNQOA; тожъ самое сдѣлай и въ прочихъ четвертяхъ круга; тогда пространство опредѣленное сею кривою линѣею AHBGA будетъ элипсисъ (§ 153).

Примѣч. Хотя въ предыдущей задачѣ и показано, какимъ образомъ по даннымъ двумъ осямъ чертить элипсисъ; но при начертаніи онаго съ точною вѣрностію сего учинить не можно; ибо ежели

бы радіусъ Ax раздѣленъ былъ на весьма большое число частей, то бы должно было провести великое число полупоперешниковъ круга; слѣдовательно такоежъ количество принужденобъ было къ большей и меньшей осямъ и къ каждому полупоперешнику круга сыскивать четвертыхъ пропорціональныхъ линѣй; но поелику утвердить не можно, чтобъ при исканіи оныхъ линѣй не могло произойти какой-либо хотя малѣйшей погрѣшности; да естьлибъ оное и съ самою вѣрностію учинено было, то чрезъ точки опредѣляемыхъ полупоперешниковъ элипсиса, едвали можно будетъ провесть рукою исправно кривую линѣю; но какъ черченіе элипсиса во многихъ случаяхъ употребительно, какъ-то: при изображеніи въ планѣ Артиллерійскихъ орудій поднятыхъ на градусы; также и въ Архитектурѣ, при начерченіи кружалъ, для дѣланія элипсическихъ сводовъ, оконъ и проч., то предлагаются здѣсь два способа: первой, для начертанія элипсиса посредствомъ циркула на бумагѣ, которой весьма мало разнится отъ совершенства элипсиса; а второй способъ, для начертанія совершеннаго элипсиса на доскѣ и всякой другой поверхности посредствомъ шнура.

§ 155. *Первый способъ. По двумъ даннымъ осямъ* AB и CD *начертить элипсисъ на бумагѣ.*

Рѣшен. Данную большую ось AB (*фиг.* 131) раздѣля на двѣ равныя части въ точкѣ X, проведи GH перпендикуляры къ AB, такъ чтобы XH и XG равны были половинѣ меньшей оси CD. Отъ точки A положи AD = XG или $=\frac{1}{2}$GH, остатокъ DX раздѣли на 8 равныхъ частей, сдѣлай линѣю DM $=\frac{3}{8}$DX. Радіусомъ AM опиши кругъ; положи BC = AM, изъ точки C радіусомъ BC опиши кругъ; на линѣѣ MC начерти равносторонные треугольники

MEC и MFC; продолжи EC и EM, также FC и FM, пока пересѣкутся съ окружностьми круговъ въ точкахъ N, K, R и Q; напослѣдокъ изъ точки E радiусомъ EK опиши дугу KHN, а изъ точки F радiусомъ FQ дугу QGR, которыя пройдя чрезъ концы меньшей оси GH и коснувшись круговъ въ точкахъ K, N, Q и R (§ 88), изобразится элипсисъ AQGRBNHKA.

Второй способъ. По даннымъ двумъ осямъ AB *и* CD *начертить элипсисъ посредствомъ шнура.* Фиг. 132.

Рѣшен. Проведя черту AB равну большей оси, чрезъ половину оной проведи CD перпендикулярно къ AB, такъ чтобы каждая ND и NC равна была половинѣ меньшой оси CD, потомъ величиною линѣи AN равною $\frac{1}{2}$AB, изъ точки C опиши дуги, пересѣкающiя большую ось AB въ точкахъ E и F; въ сихъ точкахъ вколоти гвозди, за которые привяжи шнуръ, чтобы длина онаго между гвоздями равна была большой оси AB, такъ что ежели натянется шнуръ, то бы сгибъ его находился у точки A; ибо въ семъ случаѣ будетъ FB = AE; по сему EF + FB + AE = EF + 2AE = AB = длинѣ шнура; потомъ вложивъ въ сгибъ сего шнура, находящейся у точки A карандашь, или какое нибудь другое остроконечное орудiе, веди оное (держа къ поверхности перпендикулярно), натягивая шнуръ; отъ точки A къ G и отъ G къ B, потомъ отъ B къ H, а отъ H къ A, тогда начертится требуемой элипсисъ.

ОТДѢЛЕНІЕ ВТОРОЕ.

О измѣреніи плоскостей треугольниковъ и четвероугольниковъ.

§ 157. ТЕОРЕМА. *Всякой параллелограммъ* ABCD, *діогональю* AC *дѣлится на двѣ равныя части.* (Фиг. 133.

Доказ. Ибо треугольникъ ABC=△ADC, потому что AB=DC, BC=AD (§ 45) и AC общій бокъ, а такіе треугольники совершенно равны (§ 29); слѣдственно каждой равенъ половинѣ параллелограмма ABCD.

§ 158. ТЕОРЕМА. *Параллелограммы* ABCD *и* AEFD, *имѣющіе одно основаніе* AD *и равныхъ высотъ, то есть заключающіеся между двухъ параллельныхъ линѣй* AD *и* BF, *суть равны между собою.* (Фиг. 134 и 135.

Доказ. I. Ибо треугольникъ ABE=△DCF (*фиг.* 134), потому что AB=DC, AE=DF (§ 45), и BE=CF, для того, что BC=AD=EF, а отнявъ отъ BC и EF общую EC, останется BE=CF (*Ариѳм.* § 32); но такіе треугольники по § 29 равны; слѣдовательно придавъ къ нимъ общую трапецію ADCE, будетъ параллелограммъ ADCB=ADFE.

Доказ. II. Треугольникъ ABF=△DCF, потому что бокъ AB=DC, AE=DF и AD=BC=EF (§ 45), и придавъ къ послѣднимъ общую линѣю CE, будетъ BE=CF, по сему треугольникъ ABE=△DCF (§ 29), отъ коихъ отнявъ общій треугольникъ ECI, останется трапеція ABCI=DFEI; а когда къ каждой изъ нихъ придастся общій треугольникъ ADI, то будетъ параллелограммъ ADCB=ADFE.

Слѣдств. I. Изъ сего видно, что треугольникъ ADB, имѣющій съ параллелограммомъ ADFE одно основаніе AD и равную высоту BG (§ 42), равенъ половинѣ параллелограмма ADFE. *Фиг.* 135.

Слѣдств. II. Изъ того же явствуетъ, что треугольники ABD и ADF, имѣющіе одно основаніе и одинакую высоту, суть равны между собою; поелику каждой изъ нихъ равенъ половинѣ параллелограмма ADCB и ADFE, кои равны между собою; а когда цѣлыя равны, то и половины ихъ равны.

§ 159. *Опредѣл.* Плоскія и кривыя поверхности вообще измѣряются плоскостями, какъ то: квадратными саженьми, квадратными футами, дюймами и прочая. *Квадратная сажень* есть квадратъ A (*фиг.* 136), котораго каждой бокъ по сажени. *Квадратной футъ* есть квадратъ B, котораго каждой бокъ по футу и проч. И такъ подъ словомъ измѣрять плоскость, разумѣется найти, сколько разъ квадратъ A или B содержится въ данной плоскости, *на прим.* прямоугольника ABDC (*фиг.* 137) и прочая.

§ 160. ТЕОРЕМА. *Плоскость прямоугольника ABDC равна произведенію изъ основанія AC и высоты AB.* Фиг. 137.

Доказ. Положимъ, что основаніе AC имѣетъ пять, а высота AB три фута; то раздѣля основаніе AC на 5, а высоту AB на 3 равныя части (§ 47), и изъ точекъ E и F раздѣленной AB, проведя линѣи параллельно къ AC, произойдетъ три равныхъ прямоугольнка AH, FG и ED; потомъ, ежели изъ точекъ раздѣ-

ленной AC проведутся линѣи параллельно къ AB, то въ каждомъ изъ тѣхъ прямоугольниковъ будетъ по пяти квадратныхъ футовъ, равныхъ AF*rn*, каковыхъ въ трехъ равныхъ прямоугольникахъ будетъ 15; то же самое произойдетъ и отъ умноженія основанія AC на высоту AB, то есть AC×AB, или $5' \times 3' = 15''$ квадратнымъ футамъ, составляющимъ плоскость прямоугольника ABDC.

Слѣдств. Поелику квадратъ AD есть такой прямоугольникъ, у котораго бока CD и AC равны; то плоскость квадрата будетъ равна произведенію изъ бока AC или CD самимъ собою умноженнаго, то есть AC×DC=DC×DC (*) равна плоскости квадрата ABCD. *Фиг.* 138.

Примѣч. I. Поелику квадратная сажень имѣетъ въ основаніи и высотѣ своей по 7 обыкновенныхъ футовъ; по сей причинѣ плоскость оной содержитъ въ себѣ семь разъ по 7ми квадратныхъ футовъ, то есть 49′; также квадратнаго фута основаніе и высота имѣютъ по 12 дюймовъ, по сему площадь онаго будетъ имѣть 12 разъ по 12ти квадратныхъ дюймовъ, то есть 144 квадрат. дюйма. Слѣдовательно Геометрическая (*десятичная*) квадратная сажень будетъ имѣть въ себѣ 100 квадратныхъ футовъ, а футъ 100 квадр. дюймовъ, и такъ далѣе.

Примѣч. II. Изъ того явствуетъ, когда линѣйныя сажени умножатся линѣйными саженьми, то въ произведеніи будутъ квадратныя сажени; а когда линѣйные футы умножатся линѣйными фута-

(*) По сей причинѣ площадь квадрата AD означается чрезъ $\overline{DC}^2$, при чемъ и выговаривается: квадратъ изъ линѣи DC.

ми, то въ произведеніи произойдутъ квадратные футы, и такъ далѣе. Слѣдовательно, ежели извѣстное количество квадратной мѣры раздѣлится на линѣйную мѣру того же званія, то въ частномъ числѣ произойдетъ линѣйная жъ или простая мѣра.

§ 161. ЗАДАЧА. *По извѣстному боку* AD *квадрата* AC *найти онаго площадь.* Фиг. 77.

Рѣшен. Положимъ бокъ AD=15°, то умноживъ величину бока AD саму собою, получится требуемая площадь квадрата AC (§ 160. *Слѣд.*), то есть AD×AD=15°×15°=225° квад. саж. есть площадь квадрата ABCD.

Слѣдств. Изъ сего видно, что бокъ AD квадрата AC, равенъ квадратному корню изъ площади квадрата DC; *на прим.* когда площадь квадрата AC=225°, то $\sqrt{225°}$=15° будетъ означать величину бока AD квадрата AC.

Примѣч. Естьли бокъ AD квадрата AC будетъ содержать въ себѣ сажени съ футами, то надлежитъ оныя привести въ футы, и умноживъ количество оныхъ футовъ само собою, получится площадь квадрата, въ числѣ квадратныхъ футовъ; потомъ выключа изъ нихъ квадратныя сажени, то есть раздѣля на 49, получится площадь квадрата, въ числѣ квадратныхъ саженъ съ футами. Слѣдовательно, ежели будетъ извѣстна площадь квадрата въ числѣ квадратныхъ саженъ и футовъ, то должно квадратныя сажени привести въ квадратные футы, а потомъ найти квадратной корень, тогда получится бокъ AD квадрата AC въ числѣ линѣйныхъ футовъ; изъ коихъ выключа сажени, найдется требуемой бокъ AD содержащій въ себѣ число простыхъ саженъ съ футами.

§ 162. ТЕОРЕМА. *Плоскость всякаго парал-*

лелограмма ABCD, равна произведенію изъ высоты DE или CF на основаніе AB. (Фиг. 139.

Доказ. Поелику параллелограммъ ABCD равенъ прямоугольному EFCD, коего основаніе EF = AB (§ 158); но площадь прямоугольника EFCD = EF×ED или EF×CF (§ 160); слѣдовательно и площадь параллелограмма ABCD = AB×ED, или AB×CF (*Ариѳм.* § 36) (*).

Слѣдств. I. Изъ сего удобно разумѣть можно, что плоскость всякаго треугольника ACB равна половинѣ произведенія изъ основанія AB и высоты CF, и равна также произведенію изъ основанія AB на половину высоты CF; или равна произведенію изъ половины основанія AB на высоту CF; ибо треугольникъ ACB равенъ половинѣ параллелограмма ABCD, имѣющаго съ нимъ одно основаніе AB и одинакую высоту CF = DE (§ 158. *Слѣд.* 1); слѣдовательно площадь треугольника $ACB = \frac{AB \times CF}{2} = AB \times \frac{1}{2} CF = \frac{1}{2} AB \times CF$ (**).

§ 163. ЗАДАЧА. *По извѣстному основанію AD = 32° и высотѣ BE = 13°, 4′ Россійской мѣры найти площадь параллелограмма ABCD.* (Фиг. 75.

Рѣшен. Приведя основаніе AD и высоту BE въ футы, умножь количество основанія AD высотою BE; то произшедшее произведеніе будетъ требуемая площадь параллелограмма

(*) При означеніи площади параллелограмма AC, чрезъ AB×DE, принимается одна линѣя за основаніе а другая за высоту, и выговаривается: параллелограммъ изъ линѣй AB и DE.

(**) При означеніи площади треугольника ACB чрезъ $\frac{1}{2}$AB×CF, тожъ должно разумѣть, что сказано о параллелограммѣ.

AC, состоящая изъ квадратныхъ футовъ; потомъ приведя оные футы въ квадратныя сажени, получится требуемая площадь параллелограмма AC, то есть $13^{\circ}+4'=13\times7'+4'=95'=BE$. $32^{\circ}=32\times7'=224'=AD$; по сему $AD\times BE=224'\times95'=21280$ квадрат. фут. равно площади параллелограмма AC; а когда сіе число раздѣлится на 49, т. е. на число квадратныхъ футовъ составляющихъ квадратную сажень, то частное число $434^{\circ}, 14'$ квадратн. $=AD\times BE$, будетъ означать требуемую площадь параллелограмма AC, состоящую изъ 434 квадратн. саж. и 14 квадр. футовъ.

§ 164. ЗАДАЧА. *По данной площади параллелограмма* $ABCD=3280^{\circ}$ *и основанію* $AD=80^{\circ}$, *найти онаго высоту* BE (Фиг. 75.

Рѣшен. Площадь параллелограмма ABCD, раздѣля на основаніе AD, получится требуемая высота BE, т. е. $\frac{3280}{80}=41^{\circ}=$высотѣ BE.

§ 165. ЗАДАЧА. *Въ треугольникѣ* CDE *извѣстна высота* $DN=60^{\circ}, 4'$ *и основаніе* $CE=140^{\circ}, 2', 4''$ *Французской мѣры, найти площадь онаго.* (Фиг. 18 *и* 19.

Рѣшен. Приведя мѣру высоты DN и основанія CE въ дюймы, умножь высоту на половину основанія, или основаніе на половину высоты; произшедшее отъ того произведеніе, то есть квадратныя дюймы, приведи въ тоазы, футы и проч., получится требуемая площадь треугольника CDE, какъ то изъ слѣдующаго рѣшенія видно. Поелику Французской тоазъ имѣетъ шесть футовъ, а футъ 12 дюймовъ, то будетъ $DN=60+4'=60^{\circ}\times6'+4'=364'=364\times12'=4368$ дюйм. $CE=140^{\circ}+2'+4'=10108$ дюйм.; по сему будетъ $\frac{1}{2}DN\times CE=$

$\frac{4368}{2}\times 10108 = 22075872$ квадрат. дюйм. = площади треугольника CDE; но какъ тоазъ имѣетъ 72 дюйма, то квадратной тоазъ содержитъ въ себѣ 5184 квадрат. дюйма, а въ квадратномъ футѣ 144 квадр. дюйм.; и для того будетъ $\frac{22075872}{5184} = 4258°, 16', 96''$ квадр. = площади треугольника CDE.

§ 166. ЗАДАЧА. *По извѣстной площади треугольника CDE=3943°, 20' и основанію CE= 186° десятичной мѣры, найти высоту DN.* Фиг. 18.

Рѣшен. Данную площадь треугольника CDE, раздѣли на половину основанія CE, получишь требуемую высоту DN; то есть $\frac{186}{2} = 93 = \frac{1}{2}$CE, и $\frac{3943 \cdot 20}{93 \cdot 0} = 42°, 4'$ = высотѣ DN.

Прибавл. Такимъ же образомъ по извѣстной площади и высотѣ DN, найдется основаніе CE треугольника CDE, когда площадь онаго на половину высоты DN раздѣлится.

§ 167. ТЕОРЕМА. *Ежели площади параллелограммовъ ABCD и FGHI равны, то основанія ихъ AB и FG будутъ въ обратномъ содержаніи высотъ.* Фиг. 140.

Доказ. Поелику площадь параллелограмма ABCD=AB×DE, также и площадь параллелограмма FGHI=FG×LI (§ 162). И такъ когда AB×DE=FG×IL, то изъ сего выйдетъ слѣдующая пропорція: AB:FG=IL:DE (*Ариѳм.* § 127. *Приб.*); гдѣ (какъ видно) основаніе и высота одного параллелограмма суть крайніе члены, а основаніе и высота другаго суть средніе члены въ пропорціи; и притомъ произведеніе крайнихъ членовъ AB×DE равно произведенію среднихъ FG×IL, по сему оные

члены составляютъ Геометрическую пропорцію (*Ариѳм.* § 116). Слѣдовательно и обратно, когда основанія двухъ параллелограммовъ будутъ въ обратномъ содержаніи ихъ высотъ, то такіе параллелограммы равны одинъ другому.

Слѣдств. I. Изъ сего удобно разумѣть можно, когда основанія двухъ треугольниковъ ADB и FIG будутъ въ обратномъ содержаніи ихъ высотъ, то такіе треугольники будутъ равны между собою; ибо когда $AB : FG = IL : ED$, то будетъ $AB \times ED = FG \times IL$ (*Ариѳм.* § 115), и слѣдовательно $\frac{1}{2} AB \times ED = \frac{1}{2} FG \times LI$ (*Ариѳм.* § 43).

Слѣдств. II. Изъ того же явствуетъ, что въ семъ случаѣ основаніе AB одного параллелограмма ABCD, или треугольника ABD, будетъ во столько разъ больше или меньше основанія FG другаго параллелограмма FGHI, или треугольника FGI, во сколько разъ высота LI втораго больше или меньше высоты ED перваго.

§ 168. ТЕОРЕМА. *Площадь трапеціи* ABCD *равна произведенію изъ полсуммы параллельныхъ линѣй* BC *и* AD *на высоту* BE. Фиг. 141.

Доказ. Продолживъ AD, сдѣлай $DF = BC$, и проведи BF; то будетъ $\Delta BCG = \Delta DFG$, потому что $BC = DF$ по положенію, уголъ $BCG = \angle GDF$ и уголъ $GBC = GFD$ (§ 43), по сему и $CG = GD$ (§ 27); а придавъ къ каждому изъ сихъ треугольниковъ общій четвеpосторонникъ ABGD, будетъ трапеція ABCD равна треугольнику ABF, котораго плоскость равна $\frac{1}{2} AF \times BE$ (§ 162. *Слѣд.*); но $\frac{1}{2} AF = \frac{1}{2}(AD + DF) = \frac{1}{2}(AD + BC)$; слѣдовательно $\frac{1}{2} AF \times BE = \frac{1}{2}(AD + BC) \times BE$ (*Ариѳм.* § 36), то есть полсуммы параллельныхъ ли-

нѣй AD и BC умноженная высотою BE, равна площади трапеціи.

Слѣдств. Изъ сего видно, что площадь трапеціи ABCD, равна произведенію изъ высоты BE на линѣю GL, проведенную изъ половины бока CD параллельно къ основанію AD; ибо для подобія треугольниковъ LBG и ABF, будетъ BL : AB = LG : AF; но $LB = \frac{1}{2}AB$ (§ 47. *Слѣд.*), слѣдовательно и $LG = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}(AD + BC)$ (§ 168); а потому $LG \times BE = \frac{1}{2}(AD + BC) \times BE$ (*Ариѳм.* § 36) равно площади трапеціи ABCD. По сей причинѣ площадь трапеціи равна параллелограмму ABIK, у котораго основаніе AK равно линѣи LG, а высота равна высотѣ BE.

§ 169. ЗАДАЧА. *По извѣстной площади трапеціи* ABCD = 7918°, 40', *высотѣ* BE = 56°. 56' *и содержанію параллельныхъ линѣй* BC : AD = 3 : 4 *найти параллельныя* BC *и* AD. (Фиг. 141.

Рѣшен. Площадь трапеціи ABCD раздѣля на половину высоты BE, получится сумма параллельныхъ линѣй BC + AD; потомъ сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ 3 + 4 = 7 содержится къ 3мъ, такъ сумма параллельныхъ линѣй BC + AD будетъ содержаться къ BC, то есть 7 : 3 = BC + AD : BC (*Ариѳм.* § 118); наконецъ изъ найденной суммы параллельныхъ линѣй вычти BC, остатокъ будетъ равенъ AD, какъ то изъ слѣдующаго рѣшенія видно: $\frac{56 \cdot 56}{2} = 28.28 = \frac{1}{2}BE$, и $\frac{7918 \cdot 40}{28 \cdot 28} = 280° = BC + AD$; а потомъ будетъ 3 + 4 или 7 : 3 = 280° : 120° = BC, и наконецъ 280° − 120° = 160° = AD.

Доказ. Поелику площадь трапеціи ABCD $= \frac{1}{2}(BC + AD) \times BE = (BC + AD) \times \frac{1}{2}BE$; по сему когда площадь трапеціи раздѣлится на полови-

ну высоты BE, то частное будетъ равно суммѣ параллельныхъ линѣй BC+AD; но какъ 3 : 4 = BC : AD, то будетъ 7 : 3 = BC+AD : BC (*Ариѳ.* § 118); слѣдовательно BC+AD−BC=AD.

§ 170. ТЕОРЕМА. *Площадь всякаго четверосторонника ABCD равна произведенію изъ половины діогонали AC, на сумму перпендикуляровъ BE+DF, опущенныхъ на діогональ AC изъ противулежащихъ угловъ B и D.* Фиг. 142.

Доказ. Поелику площадь треугольника ACB $=\frac{1}{2}AC\times BE$, а площадь треугольника $ACD=\frac{1}{2}AC\times DF$, слѣдовательно сумма плоскостей сихъ треугольниковъ, составляющихъ плоскость четверосторонника $ABCD=\frac{1}{2}AC\times BE+\frac{1}{2}AC\times DF=(BE\times DF)\times\frac{1}{2}AC$.

Слѣдств. Изъ сего удобно разумѣть можно: ежели въ многоугольникѣ ABDF (*фиг.* 143), діогонали AE, BE и BD; также и опущенные на нихъ перпендикуляры FG, AH, DI и CK будутъ извѣстны, то площадь онаго найдется, когда сысканныя по § 165 плоскости треугольниковъ AEF, ABE и проч. сложатся вмѣстѣ.

§ 171. ЗАДАЧА. *Извѣстна площадь четверосторонника ABCD=13458°, діогональ AC=142°, и содержаніе перпендикуляровъ BE : DF=5 : 9, найти оные перпендикуляры.* Фиг. 142.

Рѣшен. Раздѣля площадь четверосторонника ABCD на половину діогонали AC, частное будетъ равно суммѣ двухъ перпендикуляровъ BE+DF; потомъ, составя пропорцію, какъ сумма содержанія 5+9 или 14 : 5, такъ найденная сумма перпендикуляровъ BE+DF будетъ содержаться къ BE, найдется перпендикуляръ BE, которой вычтя изъ суммы перпендикуляровъ, получится DF; какъ-то: $\frac{142}{2}=71°=$

$\frac{1}{2}$AC, и $\frac{13453}{71}$=189.54=BE+DF; потомъ 14:5 =189.54:67.69=BE, и наконецъ будетъ 189.54−67.69=121.85=DF.

Доказ. Поелику площадь четвеспоронника ABCD=$\frac{1}{2}$AC×(BE+DF); слѣдовательно когда сіе количество раздѣлится на $\frac{1}{2}$AC, то частное будетъ=BE+DF=суммѣ перпендикуляровъ; но BE:DF=5:9, то будетъ 5+9 или 14:5=BE+DF:BE (*Ариѳм.* § 118).

§ 172. ТЕОРЕМА. *Плоскости параллелограммовъ* DF *и* BG, *имѣющихъ одинакую высоту* FK *и* GH, *или заключающихся между параллельныхъ линѣй* EI *и* DB, *содержатся между собою какъ ихъ основанія* DC *и* AB. Фиг. 144.

Доказ. Поелику площадь параллелограмма DF=DC×FK, а площадь параллелограмма BG=AB×GH=AB×FK (§ 169), потому что FK=GH по положенію; по сей причинѣ будетъ DC×FK; AB×FK=DC:AB. Истина сей пропорціи видна изъ того, что въ ней произведеніе крайнихъ AB×DC×FK равно DC×AB×FK (*Ариѳм.* § 116); слѣдовательно параллелограммъ DCFE:ABIG=DC:AB.

Слѣдств. Изъ сего удобно видѣть можно, что плоскости треугольниковъ DCF и ABG, имѣющихъ равныя высоты FK и GH, содержатся какъ ихъ основанія DC и AB; ибо когда плоскость параллелограмма DCFE:ABIG= DC:AB, то будетъ и $\frac{1}{2}$DCFE:$\frac{1}{2}$ABIG=DC:AB (*Ариѳм.* § 122), т. е. ΔDCF:ΔABG=DC:AB.

§ 173 ТЕОРЕМА. *Плоскости подобныхъ треугольниковъ* ABC *и* DBH, *содержатся какъ квадраты сходственныхъ боковъ* AC *и* DH. Фиг. 103.

Доказ. Изъ верховъ B и B опустя на основанія AC и DH перпендикуляры BP и BO, будетъ BP:BO=AC:DH (§ 117. *Слѣд.* 3); а умно-

живЪ предыдущіе члены чрезЪ AC, а послѣдующіе чрезЪ DH, будетЪ $BP \times AC : BO \times DH = \overline{AC}^2 : \overline{DH}^2$ (*Ариѳм.* § 122. *Приб.* 1); естьли же члены перваго содержанія раздѣлятся на 2, то будетЪ $\frac{1}{2}BP \times AC : \frac{1}{2}BO \times DH = \overline{AC}^2 : \overline{DH}^2$; но $\frac{1}{2}BP \times AC =$ плоскости $\triangle ABC$ и $\frac{1}{2}BO \times DH = \triangle DBH$ (§ 162. *Слѣд.*); слѣдовательно плоскость $\triangle ABC$ содержится кЪ плоскости $\triangle DBH$, какЪ квадратЪ бока AC кЪ квадрату бока DH.

О разрѣшеніяхЪ треугольниковЪ и четверосторонниковЪ по средствомЪ Пиѳагоровой теоремы.

§ 174. ТЕОРЕМА. *Во всякомЪ прямоугольномЪ треугольникѣ* ABC *квадратЪ изЪ бока* AC, *лежащаго противЪ прямаго угла* B, *равенЪ суммѣ квадратовЪ изЪ боковЪ* AB *и* BC, *составляющихЪ прямой уголЪ* B. Фиг. 145.

Доказ. Начерти на бокахЪ AC, BC и AB квадраты AG, BK и AD (§ 89), изЪ верха B прямаго угла ABC, опусти перпендикулярЪ BMH; потомЪ проведя изЪ точки B линѣи BF и BG, а изЪ точекЪ A и C линѣи AK и CE, будетЪ треугольникЪ ACE=ABF; ибо бокЪ AE=AB и AC=AF (§ 82), уголЪ EAC=BAF, потому что уголЪ EAB=CAF прямые, а придавЪ кЪ каждому изЪ нихЪ общій уголЪ BAC, будетЪ уголЪ EAC=BAF; по сему треугольникЪ ACE=$\triangle$ABF (§ 26); но треугольникЪ AEC сЪ квадратомЪ AD имѣютЪ одно основаніе AE и одну высоту AB, между параллельныхЪ линѣй AE и DC; также треугольникЪ ABF сЪ прямоугольникомЪ HA имѣютЪ одно основаніе

AF и одну высоту AM, между параллельныхъ линѣй AF и BH, по сей причинѣ $\triangle AEC = \frac{1}{2}\overline{AB}^2$, а треугольникъ $ABF = \frac{1}{2}AH$ (§ 158. *Слѣд.* 1); но какъ треугольникъ $AEC = \triangle ABF$, по сему и $\frac{1}{2}\overline{AB}^2 = \frac{1}{2}AH$, и слѣдовательно $\overline{AB}^2$ = прямоугольнику AH, то есть плоскость квадрата ABDE равна плоскости прямоугольника AMHF. Такимъ же образомъ докажется, что треугольникъ $ACK = \triangle BCG$, и $\overline{BC}^2$ = прямоугольнику MG; слѣдовательно сумма квадратовъ $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ = суммѣ прямоугольниковъ $AH + MG = \overline{AC}^2$ (*).

Другимъ образомъ. Поелику мы уже видѣли въ § 191, что треугольники AMB и MBC подобны треугольнику ABC; то для подобія оныхъ будетъ $AM : AB = AB : AC$ или HM; также $MC : BC = BC : AC$ или HM; при чемъ будетъ изъ первой пропорціи $AM \times HM = \overline{AB}^2$, а изъ другой $MC \times HM = \overline{BC}^2$ (*Ариѳм.* § 115. *Приб.*); но $AM \times HM$ = площади прямоугольника FM; также $MC \times HM$ = площади прямоугольника HC (§ 160); слѣдовательно сумма прямоугольниковъ $FM + HC = \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ (*Ариѳм.* § 27).

(*) Такимъ-то образомъ *Пиѳагоръ*, жившій около 450 лѣтъ до Р. Хрістова, изобрѣлъ весьма важную и весьма употребительную въ Математикѣ теорему, и во изъявленіе своей благодарности Богу, принесъ въ жертву 100 воловъ бѣлыхъ. Вѣроятно, что сіи волы были сдѣланы изъ воску или изъ тѣста; ибо сей Философъ ученіемъ своимъ запрещалъ убивать животныхъ. Послѣ же сего изобрѣтенія Математики доказали истинну того предложенія уже многими различными образами.

Третьимъ образомъ. Поелику треугольники AMB, MBC и ABC подобны между собою (§ 121), то будетъ треугольникъ AMB : $\overline{AB}^2$ = ΔMBC : $\overline{BC}^2$ = ΔABC : $\overline{AC}^2$ (§ 173); а изъ сихъ пропорцій выдетъ слѣдующая AMB + MBC : $\overline{AB}^2$ + $\overline{BC}^2$ = ABC : $\overline{AC}^2$ (*Ариѳм.* § 131); но треугольникъ AMB + ΔMBC = ΔABC, слѣдовательно и $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ (*Ариѳм.* § 125).

Прибавл. I. Изъ втораго доказательства сей истинны видно, что прямоугольникъ MCGH : AMHF = MC : AM (§ 172); но прямоугольникъ MCGH = $\overline{BC}^2$, а прямоугольникъ AMHF = $\overline{AB}^2$; слѣдовательно и $\overline{BC}^2 : \overline{AB}^2$ = MC : AM, т. е. квадраты изъ боковъ, составляющихъ прямой уголъ, содержатся между собою какъ отрѣзки MC и AM гипотенузы AC.

Прибавл. II. Квадратъ какого нибудь бока изъ составляющихъ прямой уголъ, равенъ разности квадратовъ изъ гипотенузы AC и другаго бока; *на прим.* $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$, также $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$; ибо когда $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, то вычтя изъ обѣихъ равныхъ количествъ $\overline{BC}^2$, останется $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$.

Прибавл. III. Изъ предписанной теоремы удобно видѣть можно, что квадратъ изъ діогонали AC квадрата ABCD, вдвое больше квадрата изъ бока AD (*фиг.* 77), то есть $\overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2$; ибо для прямоугольнаго треугольника ADC, будетъ $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{AC}^2$; но въ разсужденіи равныхъ боковъ AD и DC будетъ $\overline{AD}^2 = \overline{DC}^2$; слѣдовательно $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{AD}^2$.

Примѣч. Надлежитъ примѣчать, что дїогональ AC квадрата ABCD совершенно вычислить не можно; ибо положимъ, что бокъ $AD=1$, и $DC=1$, то будетъ $\overline{AD}^2=1$ и $\overline{DC}^2=1$; по сему $\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=2\overline{AD}^2=\overline{AC}^2=2$; но поелику число 2 есть несовершенной квадратъ; по сей причинѣ и квадратной корень изъ $2\overline{AD}^2$ или $\overline{AC}^2$, то есть дїогональ AC, совершенно вычислена быть не можетъ.

§ 175. ЗАДАЧА. *По извѣстному основанїю* $AB=60'$ *и высотѣ* $AC=80'$ *прямоугольнаго треугольника* ABC, *найти гипотенузу* BC. (Фиг. 17.

Рѣшен. Основанїе AB умножь квадратно, также и высоту AC квадратно, то сумма найденныхъ квадратовъ будетъ равна квадрату изъ гипотенузы BC; потомъ изъ площади сего квадрата извлеки корень, то получится величина гипотенузы BC; т. е. $60'\times60'=3600'=\overline{AB}^2$, и $80'\times80'=6400'=\overline{AC}^2$, потомъ $3600'+6400'=10000'=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ (§ 174), а наконецъ $\sqrt{10000'}=100=BC$ (§ 161. *Слѣд.*).

§ 176. ЗАДАЧА. *По извѣстной дїогонали* BC $=90'$ *и основанїю* $AB=60'$ *прямоугольнаго треугольника* ABC *найти высоту* AC. (Фиг. 17.

Рѣшен. Умноживъ гипотенузу BC квадратно, также и основанїе AB квадратно, количество послѣдняго квадрата вычти изъ перваго, то получится квадратъ изъ высоты AC; потомъ изъ разности сихъ квадратовъ извлеки квадратной корень, то получится величина высоты AC; то есть $90'\times90'=8100'=\overline{BC}^2$, $60'\times60'=3600'=\overline{AB}^2$, и $8100'-3600'=4500'=\overline{BC}^2-\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$ (§ 174. *Приб.* 2); а наконецъ будетъ $\sqrt{4500'}=67'.08=AC$.

Прибавл. Такимъ же образомъ по извѣстной гипотенузѣ BC и высотѣ AC найдется основаніе AB, когда изъ разности квадратовъ гипотенузы BC и высоты AC извлечется квадратной корень.

§ 177. ЗАДАЧА. *По извѣстной площади прямоугольнаго равнобедреннаго треугольника* ABC $=3200°$, *найти бока* AB *и* AC. (Фиг. 146.

Рѣшен. Изъ удвоенной площади треугольника ABC извлеки квадратной корень, то получится величина бока AB=BC; потомъ по извѣстнымъ бокамъ AB и BC найдется основаніе AC (§ 175); то есть $3200° \times 2 = 6400° = \overline{AB}^2$, и $\sqrt{6400°} = 80° = AB = BC$; а потомъ будетъ $6400° \times 2 = 12800° = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$, $\sqrt{12800°} = 113°.13' =$ основанію AC.

Доказ. Изъ точекъ A и C проведя линѣи AD и CD параллельно къ бокамъ BC и AB, будетъ четвеؘросторонникъ ABCD квадратъ; ибо уголъ BAC=ACB=45° (§ 48. *Слѣд.* 5); также уголъ BAC=ACD=CAD=45 град. (§ 43); по сему уголъ BAD=BCD=90°, и притомъ BC=AD=AB=DC (§ 45); слѣдовательно четвеؘросторонникъ ABCD есть квадратъ, и треугольникъ ABC=ACD (§ 27); по сей причинѣ $\triangle ABC \times 2 = \overline{AB}^2$, и $\sqrt{\overline{AB}^2} = AB$; также $\overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2$ (§ 174. *Приб.* 3), и слѣдовательно $\sqrt{\overline{AC}^2} = AC$.

§ 178. ЗАДАЧА. *По извѣстному боку* AB= 120° *равностороннаго треугольника* ABC, *найти площадь онаго.* Фиг. 14.

Рѣшен. Изъ верха B, на основаніе AC опусти перпендикуляръ BD, коимъ основаніе AC раздѣлится на двѣ равныя части въ точкѣ D

(§ 39. *Слѣд.* 2); потомъ по извѣстному основанію AD и гипотенузы AB прямоугольнаго треугольника ABD, сыщи высоту BD (§ 176); и наконецъ сею высотою умножь половину основанія AC, то получится требуемая площадь треугольника ABC (§ 162. *Слѣд.*); то есть $\frac{120}{2}=60^\circ=AD=\frac{1}{2}AC$, и для того будетъ $120^\circ \times 120^\circ=14400^\circ=\overline{AB}^2$, и $60^\circ \times 60^\circ=3600^\circ=\overline{AD}^2$; потомъ $14400^\circ-3600^\circ=10800^\circ=\overline{AB}^2-\overline{AD}^2=\overline{BD}^2$; и слѣдовательно $\sqrt{10800}=103^\circ.9'=BD$; и наконецъ $60^\circ \times 103^\circ, 9'=6234=\frac{1}{2}AC \times BD=$ площади треугольника ABC (§ 162. *Слѣд.*).

§ 179. ТЕОРЕМА. *Квадратъ бока* AC *втрое больше квадрата радіуса* AE, *равносторонняго треугольника* ABC. Фиг. 147.

Доказ. Поелику радіусъ AE=AD (§ 104), и AB перпендикулярна къ діаметру CD, то въ разсужденіи прямоугольнаго треугольника ACD, будетъ $\overline{AC}^2:\overline{AD}^2=CG:GD$ (§ 174. *Приб.* 1); но CG втрое больше GD (§ 104); слѣдовательно и $\overline{AC}^2$ втрое больше $\overline{AD}^2$ или $\overline{AE}^2$ (*Ариѳм.* § 126), а потому $\overline{AC}^2:\overline{AE}^2=3:1$.

Прибавл. Изъ сего видно, что квадратъ перпендикуляра CG, равенъ тремъ четвертямъ квадрата бока AC; ибо положивъ GF=CG и проведя FN параллельно къ CG, будетъ квадратъ $CGFN=\overline{CG}^2$, который съ прямоугольникомъ CGIK равнымъ $\overline{AC}^2$ имѣютъ общую высоту CG, и для того CGFN:CGIK=GF:GI, или какъ CG:CD (§ 172), по сему и $\overline{CG}^2:\overline{AC}^2=CG:CD$; но $CG=\frac{3}{4}CD$ (§ 104); слѣдовательно и $\overline{CG}^2=\frac{3}{4}\overline{AC}^2$; или $\overline{CG}^2:\overline{AC}^2=3:4$, потому что CG:CD

$=3:4$ (§ 104). Также квадратъ бока AC равенъ тремъ четвертямъ квадрата CD, ибо прямоугольникъ $CGIK=\overline{AC}^2$, $CDHK=\overline{CD}^2$, и притомъ $CGIK:CDHK=CG:CD$ (§ 172); по сему и $\overline{AC}^2:\overline{CD}^2=CG:CD$; но $CG=\frac{3}{4}CD$; слѣдовательно и $\overline{AC}^2=\frac{3}{4}\overline{CD}^2$; или $\overline{AC}^2:\overline{CD}^2=3:4$, потому что $CG:CD=3:4$ (§ 104).

§ 180. ЗАДАЧА. *По извѣстному радіусу* AE $=70'$ *равностороннаго треугольника* ABC, *найти бокъ* AB. (Фиг. 90.

Рѣшен. Квадратъ изъ радіуса $AE=4900$ умноживъ чрезъ 3, получится квадратъ бока $\overline{AC}^2$, котораго квадратной корень будетъ равенъ боку AC, какъ-то: $70'\times70'=4900'=\overline{AE}^2$; $4900\times3=14700'=\overline{AC}^2$, и наконецъ $\sqrt{14700'}=121=$ боку AC. *Или:* Раздѣля радіусъ AE, которой равенъ ED, на двѣ равныя части, получишь EG (§ 104); а потомъ по извѣстной AE и EG сыщется AG (§ 176. *Приб.*), которую умноживъ чрезъ 2, получится бокъ AB.

Прибавл. Ежели должно будетъ по извѣстному боку AB найти радіусъ AE, то раздѣля квадратъ бока AB на три равныя части, получится квадратъ радіуса AE, котораго квадратной корень будетъ равенъ радіусу AE. *Или:* Раздѣля бокъ AB пополамъ, получишь AG; потомъ по извѣстной AG и AC найдется высота CG (§ 176), и наконецъ будетъ $\frac{2}{3}CG=CE=AE$ (§ 104).

§ 181. ЗАДАЧА. *По высотѣ* CG *равностороннаго треугольника* ABC, *найти бокъ* AB. (Фиг. 90.

Рѣшен. Умножа высоту CG чрезъ $\frac{2}{3}$, получится радіусъ CE$=\frac{2}{3}$CG (§ 104); а по извѣстному радіусу, посредствомъ предыдущей задачи, найдется бокъ AB. *Или:* Умножа высоту CG квадратно, сдѣлай пропорцію какъ $3:4=\overline{CG}^2:\overline{AB}^2$, откуда найдется $\frac{4}{3}\overline{CG}^2=\overline{AB}^2$; потомъ изъ найденной площади $\overline{AB}^2$ извлеки квадратной корень, получится величина бока AB.

§ 182. ТЕОРЕМА. *Квадратъ діаметра* AB *круга* ADBC, *вдвое больше квадрата* ADBC *вписаннаго въ томъ же кругѣ.* (Фиг. 92.

Доказ. Поелику треугольникъ ABD равенъ половинѣ прямоугольника AE, также и треугольникъ ABC равенъ половинѣ прямоугольника AF (§ 158. *Слѣд.*); слѣдовательно квадратъ ADBC равенъ половинѣ квадрата IEFH.

§ 183. ЗАДАЧА. *По извѣстной площади прямоугольнаго треугольника* ABD *и содержанію высоты* AB *къ основанію* AD$=4:5$, *найти высоту* AB, *основаніе* AD *и гипотенузу* BD. (Фиг. 148.

Рѣшен. Естьли площадь треугольника ABD удвоится, то получится плоскость прямоугольника ABCD (§ 157); но поелику содержаніе $4:5$ означаетъ, что высота AB содержитъ въ себѣ 4 такія равныя части, каковыхъ основаніе AD имѣетъ въ себѣ 5; по сей причинѣ естьли 4 умножится чрезъ 5, то произведеніе 20 будетъ равно числу квадратовъ, составляющихъ плоскость прямоугольника ABCD; слѣдовательно, ежели извѣстная площадь прямоугольника ABCD раздѣлится на число сихъ квадратовъ, то есть на 20, то частное число будетъ означать плоскость одного квадрата Abde, изъ составляющихъ плоскость

прямоугольника ABCD, и квадратной корень сего квадрата будетъ равенъ $Ab = Ac$; слѣдовательно, ежели величина бока Ab умножится чрезъ 4, то получится высота AB, и $Ac \times 5 =$ AD; потомъ по извѣстной высотѣ AB и основанію AD, найдется діогональ BD (§ 175). И такъ положимъ, что площадь треугольника $ABD = 1440$, то будетъ $1440 \times 2 = 2880$ равно прямоугольнику ABCD, и $\frac{2880}{20} = 144 = \overline{Ab}^2 = \overline{Ac}^2$, по сему $\sqrt{144} = 12 = Ab = Ac$; потомъ $12 \times 5 = 60 = AD$, и $12 \times 4 = 48 = AB$; а наконецъ будетъ $60 \times 60 = 3600 = \overline{AD}^2$, $48 \times 48 = 2304 = \overline{AB}^2$, и $3600 + 2304 = 5904 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BD}^2$ (§ 174), слѣдовательно $\sqrt{5904} = 76.83 = BD$.

§ 184. ЗАДАЧА. *По извѣстной діогонали* BC *и содержанію высоты* AB *къ основанію* AC *какъ* 3 : 4, *прямоугольнаго треугольника* ABC, *найти высоту* AB *и основаніе* AC. (Фиг. 149.

Рѣшен. Поелику высота AB содержитъ въ себѣ три такихъ равныхъ частей, каковыхъ основаніе AC имѣетъ въ себѣ 4, и по свойству прямоугольнаго треугольника ABC будетъ $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ (§ 174); слѣдовательно, ежели части высоты AB и части основанія AC умножатся квадратно, то сумма сихъ квадратовъ означающая сумму плоскостей $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, будетъ означать число квадратовъ, составляющихъ плоскость квадрата изъ діогонали BC, то есть $3 \times 3 = 9 = \overline{AB}^2$, и $4 \times 4 = 16 = \overline{AC}^2$, по сему будетъ $9 + 16 = 25 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$; слѣдовательно когда діогональ BC умножится квадратно, а потомъ плоскость сего квадрата раздѣлится на 25, то

частное число будетъ означать плоскость одного квадрата $Akbm$; естьли же изъ площади сего квадрата извлечется квадратной корень, то получится бокъ $Ak=An$; и наконецъ будетъ $Ak\times4=AC$, и $An\times3=AB$. И такъ положимъ діогональ $BC=95'$, то будетъ $95'\times95'=9025'=\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$, и слѣдовательно $\frac{9025}{25}=361'=Akbm=\overline{Ak}^2$, и $\sqrt{361'}=19'=Ak=An$, а наконецъ $19\times4=76=AC$, и $19\times3=57=AB$.

§ 185. ЗАДАЧА. *По извѣстной площади и діогонали AC прямоугольника ABCD, найти онаго бока AB и BC.* (Фиг. 150.

Рѣшен. Раздѣля данную площадь прямоугольника ABCD на двѣ равныя части, получится площадь треугольника ABC (§ 157); потомъ площадь сего треугольника раздѣливъ на половину основанія AC, получится высота BE (§ 166); но поелику діогональ $AC=BD$, то будетъ и $BF=AF=\frac{1}{2}AC$, потому что треугольникъ $ABF=\triangle DCF$; ибо $AB=CD$ (§ 45), уголъ $ABF=CDF$, и уголъ $BAF=DCF$ (§ 43), по сему $BF=FD=AF$ (§ 27). И такъ по извѣстной $BF=\frac{1}{2}AC$, и высотѣ BE прямоугольнаго треугольника BEF, найдется основаніе EF (§ 176. *Слѣд.*), которую вычтя изъ AF останется AE; потомъ по извѣстнымъ BE и AE, прямоугольнаго треугольника ABE, сыщется бокъ AB (§ 175); наконецъ когда данная площадь прямоугольника раздѣлится на высоту AB, то получится основаніе $AD=BC$ (§ 164). И такъ положимъ площадь прямоугольника $ABCD=4800°$, діогональ $AC=BD=100°$, то будетъ $\frac{4800}{2}=2400°=\frac{1}{2}ABCD=\triangle ABC$; но какъ $\frac{100}{2}=50°=\frac{1}{2}AC=AF=BF$, то будетъ $\frac{2400}{50}=48°=BE$; а для

треугольника BEF будетъ $\overline{EF}^2 - \overline{BF}^2 = \overline{FF}^2 = 2500°$ $- 2304° = 196°$, и слѣдовательно $\sqrt{196°} = 14°$ $= EF$, по сему $AF - EF = AE = 50° - 14° = 36°$; потомъ для ΔABE будетъ $\overline{BE}^2 + \overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 = 2304°$ $+ 1296° = 3600°$, и $\sqrt{3600°} = 60° = AB$; а наконецъ $\frac{4800}{60} = 80° = BC$.

§ 186. ЗАДАЧА. *Въ прямоугольномъ треугольникѣ* ABC *извѣстна діогональ* AB *и разность перпендикуляровъ* BC—AC=BG, *найти высоту* BC *и основаніе* AC. Фиг. 151.

Рѣшен. Продолжа AG, опусти изъ точки B перпендикуляръ BD, то оной будетъ равенъ GD; ибо въ прямоугольномъ равнобедренномъ треугольникѣ ACG уголъ AGC=45° (§ 48. *Слѣд.* 5); но уголъ AGC=BGD (§ 21)=45° по сему въ прямоугольномъ треугольникѣ GDB, уголъ GBD=45° и слѣдовательно бокъ BD= DG; и притомъ $\overline{BG}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DG}^2 = 2\overline{DG}^2$ (§ 174. *Приб.* 3); по сему $\frac{1}{2}\overline{BG}^2 = \overline{DG}^2$ (*Ариѳм.* § 43). И такъ умноживъ разность BG квадратно, раздѣли плоскость сего квадрата на двѣ равныя части, то частное будетъ равно $\overline{BD}^2 = \overline{DG}^2$; изъ плоскости сего квадрата извлеки квадратной корень, получишь величину бока DG; потомъ для прямоугольнаго треугольника ABD, умножь бокъ AB квадратно, изъ найденной площади вычтя квадратъ бока BD, получишь квадратъ изъ бока AD (§ 176), коего квадратной корень будетъ равенъ боку AD; а когда изъ величины сего бока вычтется DG, то останется величина діогонали AG; и наконецъ для подобныхъ треугольниковъ BDG и AGC сдѣлай пропорцію BG:AG=BD:AC или CG; и CG+BG=BC.

И такъ положимъ діогональ $AB=500^{\circ}$, разность $BG=100$, то будетъ $100\times100=10000^{\circ}$ $=\overline{BG}^2=\overline{GD}^2+\overline{BD}^2$, и $\frac{10000}{2}=5000^{\circ}=\frac{1}{2}\overline{BG}^2=\overline{BD}^2=\overline{GD}^2$, и $\sqrt{5000}=70.71=GD=BD$; потомъ 500×500 $=250000^{\circ}=\overline{AB}^2$ и $\overline{AB}^2-\overline{BD}^2=\overline{AD}^2=250000-5000^{\circ}$ $=245000^{\circ}$ и слѣдовательно $\sqrt{245000^{\circ}}=494.97$ $=AD$; по сему $494.97-70.71=424.26=AD$ $-GD=AG$; а наконецъ будетъ $BG:AG=BD:$ AC, то есть $100:424.26=70.71:299.99$ или $300=AC=CG$, и слѣдовательно $300+100=$ $400=CG+GB=BC$.

§ 187. ТЕОРЕМА. *Когда прямая линѣя* AB *раздѣлится на двѣ какія нибудь части* AC *и* BC, *то квадратъ изъ цѣлой линѣи* AB, *будетъ равенъ суммѣ квадратовъ изъ неравныхъ частей* AC *и* BC *и двумъ прямоугольникамъ изъ тѣхъ же частей* AC *и* BC. (Фиг. 152.

Доказ. Начертя на линѣи AB квадратъ ABGI (§ 89), изъ точки C проведи линѣю CM параллельно къ BG, и діогональ BI, а чрезъ точку F сѣченія, линѣю EH параллельно къ AB, то будетъ уголъ $AIB=ABI$ (§ 28) $=HFI$ (§ 43. *Слѣд.* 1), по сему $HF=HI$ (§ 51) $=IM=$ FM (§ 45); но поелику уголъ $MIH=IHF=HFM$ $=FMI$ прямые, по сему четвероторонникъ HFMI есть квадратъ равный $\overline{AC}^2$ (§ 32 и 160. *Слѣд.*) Такимъ же образомъ докажется, что и четверосторонникъ BCFE есть квадратъ изъ линѣи $BC=\overline{BC}^2$; но какъ $CF=EF$ и $HF=FM$ (§ 32), то будетъ прямоугольникъ $HC=ME$, и каждой изъ нихъ равенъ $AC\times BC$ (§ 160); слѣдовательно $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+2AC\times BC$.

§ 188. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ тупоугольномъ треугольникѣ* ABC, *квадратъ изъ бока* AC, *ле-*

жащаго противъ тупаго угла ABC, *больше суммы квадратовъ прочихъ боковъ* AB *и* BC *двумя прямоугольниками изъ основанія* AB *и линѣи* BP *лежащей между тупымъ угломъ и перпендикуляромъ* CP. Фиг. 153.

Доказ. Изъ точки C, на продолженное основаніе AB, опусти перпендикуляръ CP, и на каждомъ боку AC, AP, CP и BC начертя квадраты, удобно видѣть можно, что въ разсужденіи прямоугольнаго треугольника ACP, будетъ $\overline{AC}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{AP}^2$; но поелику $\overline{AP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BP}^2 + 2AB \times BP$ (§ 187), по сему будетъ $\overline{AC}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BP}^2 + 2AB \times BP$; также для прямоугольнаго треугольника BCP, будетъ $\overline{BC}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{BP}^2$, а придавъ къ симъ количествамъ $\overline{AB}^2$, будетъ сумма квадратовъ $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CP}^2 + \overline{BP}^2$. И такъ, когда сумма сихъ послѣднихъ квадратовъ вычтется изъ $\overline{AC}^2$, то остатокъ $\overline{AC}^2 - (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) = \overline{AB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{BP}^2 + 2AB \times BP - \overline{AB}^2 - \overline{CP}^2 - \overline{BP}^2 = 2AB \times BP$, будетъ означать что квадратъ изъ бока AC, лежащаго противъ тупаго угла, больше суммы квадратовъ прочихъ боковъ AB и BC, двумя прямоугольниками изъ основанія AB и части BP.

§ 189. ЗАДАЧА. *Въ тупоугольномъ треугольникѣ* ABC, *извѣстны бока* AC=140, AB=90, BC=70, *найти площадь онаго.* Фиг. 154.

Рѣшен. Изъ точки C на продолженное основаніе AB, опусти перпендикуляръ CD, потомъ умножа каждой бокъ AC, AB и BC квадратно, изъ площади квадрата бока AC, вычти сумму квадратовъ изъ боковъ AB и BC; остатокъ раздѣли на удвоенное основаніе AB, получишь часть BD; по извѣстной BC и BD сыщи высо-

ту CD (§ 176); потомъ умножа высоту CD половиною основанія AB, получится требуемая площадь треугольника ABC (§ 165). Какъ-то: $90 \times 90 = 8100 = \overline{AB}^2$, и $70 \times 70 = 4900 = \overline{BC}^2$; по сему $8100 + 4900 = 13000 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; но какъ $140 \times 140 = 19600 = \overline{AC}^2$, то будетъ $19600 - 13000 = 6600 = \overline{AC}^2 - (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) = 2AB \times BD$; слѣдовательно $\frac{6600}{180} = 36.66 = BD$; $36.66 \times 36.66 = 1343.9556 = \overline{BD}^2$, и $4900 - 1343.9556 = 3556.0444 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{CD}^2$; по сему $\sqrt{3556.0444} = 59.63 = CD$, и наконецъ $59.63 \times 45 = 2683.35 = \frac{1}{2} AB \times CD$ равно плоскости треугольника ABC.

Рѣшен. II. Изъ верха C радіусомъ CB опиши кругъ BEFG (*фиг.* 154), продолжи AB и AC, пока пересѣкутся съ окружностію круга въ E и F; изъ точки C опусти перпендикуляръ CD; точки B и G, также E и F соедини прямыми линѣями EF и BG, то будетъ $BC = CF = GC$ радіусы; по сему $AC + CF = AC + BC = AF$ и $AC - CG = AG$. Но поелику треугольникъ AEF подобенъ треугольнику ABG, потому что уголъ EAG общій, уголъ $AGB = AEF$, каждой измѣряется половиною дуги BGF (§ 71 и 75), уголъ $ABG = AFE$. И такъ для подобія сихъ треугольниковъ, будетъ $AB : AF = AG : AE$, т. е. $AB : AC + BC = AG : AE$; а когда изъ AE вычтется AB, то получится BE, которую раздѣля на двѣ равныя части, частное будетъ равно BD (§ 59. *Слѣд.* 9); потомъ по извѣстной діогонали BC и основанію BD, прямоугольнаго треугольника BDC найдется высота CD (§ 176), которую умноживъ половиною основанія AB,

получится требуемая площадь треугольника ABC. Какъ-то: 140+70=210=AC+BC=AF, и 140−70=70=AC−CG=AG; потомъ будетъ AB:AF=AG:AE, т. е. 90:210=70:163.33 =AE; по сему 163.33−90=73.33=AE−AB =BE, и $\frac{73.33}{2}$=36.66=$\frac{1}{2}$BE=BD, а для △BCD будетъ $\overline{BC}^2-\overline{BD}^2=\overline{CD}^2$=4900−1343.9556=3556.0444 и $\sqrt{}$3556.0444=59.63=CD; а наконецъ 59.63×45=2683.35=$\frac{1}{2}$AB×CD=плоскости △ABC.

§ 190. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ треугольникѣ ABC, квадратъ изъ бока AC лежащаго противъ остраго угла ABC, меньше суммы квадратовъ изъ другихъ боковъ AB и BC, двумя прямоугольниками изъ основанія AB и отрѣзка BD* (Фиг. 155.

Доказ. На основаніи AB сдѣлай квадратъ ABHI; продолжи перпендикуляръ CD, пока пересѣчется съ бокомъ HI квадрата AH; положи BE=BD, изъ точки E проведи EF параллельно основанію AB, на линѣи GH начерти квадратъ GK, то будетъ $\overline{AD}^2$=FRGI, прямоугольникъ ADRF=RGHE (§ 187) и $\overline{BD}^2=\overline{GH}^2$; по сему ADRF+BDRE=HGRE+GHKN, т. е. прямоугольникъ ABEF равенъ прямоугольнику NKER. И такъ для прямоугольнаго треугольника ADC будетъ $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2$=FRGI+$\overline{CD}^2$; а для треугольника DBC, будетъ $\overline{BC}^2=\overline{DB}^2+\overline{DC}^2=\overline{DC}^2$+GHKN (§ 174); но $\overline{AB}^2$=FG+AE+RH; слѣдовательно сумма квадратовъ изъ боковъ AB и BC, т. е. $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$=FRGI+$\overline{DC}^2$+AE+RH+$\overline{GH}^2$ =FG+$\overline{DC}^2$+AE+RK; а когда изъ суммы сихъ квадратовъ вычтется $\overline{AC}^2$=FG+$\overline{CD}^2$, то останется $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2$=AE+RK=2AE; то есть

остатокъ показываетъ, что квадратъ изъ бока AC меньше суммы квадратовъ прочихъ боковъ двумя прямоугольниками AE, у котораго основаніе равно AB, а высота BE=DB.

§ 191. ЗАДАЧА. *Въ треугольникѣ* ABC *извѣстны бока* AC=100, BC=80, AB=70, *найти высоту* AD *и площадь треугольника* ABC. (Фиг. 156.)

Рѣшен. I. Умножа каждой бокъ квадратно, сложи квадратъ бока AB съ квадратомъ бока BC, изъ суммы сихъ квадратовъ вычти квадратъ бока AC, то остатокъ будетъ равенъ площади такого прямоугольника, у коего основаніе равно 2BC, а высота равна BD (§ 190); а когда площадь сего прямоугольника раздѣлится на удвоенное основаніе BC, то получится величина отрѣзка BD (§ 164); потомъ въ прямоугольномъ треугольникѣ ABD, по извѣстной AB и BD, найдется высота AD (§ 176); которую умноживъ половиною основанія BC, получится требуемая площадь треугольника ABC, какъ изъ слѣдующаго видно: $70 \times 70 = 4900 = \overline{AB}^2$, $100 \times 100 = 10000 = \overline{AC}^2$, также $80 \times 80 = 6400 = \overline{BC}^2$; потомъ будетъ $4900 + 6400 = 11300 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, и $11300 - 10000 = 1300 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = 2AB \times BD$; и $\frac{1300}{160} = 8.12 = BD$; а для $\triangle ABD$ будетъ $4900 - 65.9344 = 4834.0656 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$; слѣдовательно $\sqrt{4834.0656} = 69.52 = AD$, и наконецъ $69.52 \times 40 = 2780.80 = \frac{1}{2} BC \times AD$ равно плоскости треугольника ABC.

Рѣшен. II. Изъ точки A, меньшимъ бокомъ AB опиши кругъ BCEF (*фиг.* 156), продолжи бокъ CA, пока пересѣчется съ окружностію

въ точкѣ F; точки F и B, G и E соедини прямыми линѣями BF и GE, будетъ AF=AB =AE радіусы, AB+AC=CF, AC−AF=EC. Но поелику треугольникъ GEC подобенъ △BFC, потому что уголъ C общій, уголъ CEG=CBF измѣряются половиною дуги GEF (§ 71 и 75), и уголъ CGE=CFB; то для сего будетъ BC: CE=CF:CG (§ 117); потомъ найденную величину отрѣзка CG, вычтя изъ основанія CB, останется хорда BG, которую раздѣля на двѣ равныя части, получится BD=GD (§ 59. *Слѣд.* 2); напослѣдокъ въ прямоугольномъ треугольникѣ ABD, по извѣстнымъ AB и BD найдется высота AD (§ 176), которую умножа половиною основанія BC, получится требуемая плоскость треугольника ABC; какъ-то изъ слѣдующаго рѣшенія видно: 100+70= 170=AC+AB=CF, и 100−70=30=AC−AE =CE; потомъ будетъ BC:CE=CF.CG, т. е. 80:30=170:63.75, по сему 80−63.75=BC− CG=BG, и $\frac{16 \cdot 25}{2}$=8.19=$\frac{1}{2}$BG=BD=GD; а для △ABD, будетъ $\overline{AB}^2-\overline{BD}^2=\overline{AD}^2$=4900−65.9344 =4834.0656, и слѣдовательно $\sqrt{4834.0656}$ =69.52=AD, и наконецъ 69.52×40=2780.80 =$\frac{1}{2}$BC×AD равно площади треугольника ABC.

§ 192. ЗАДАЧА. *По извѣстнымъ бокамъ* AB, BC, CD, AD *и діогонали* AC *четвеpосторонника* ABCD, *найти другую діогональ* BD. (Фиг. 142.

Рѣшен. По извѣстнымъ бокамъ треугольника ABC, надлежитъ найти величину отрѣзка AE и высоту BE, также и по извѣстнымъ бокамъ треугольника ADC, найдется отрѣзокъ CF и высота FD; сумму отрѣзковъ AE+CF, вычтя изъ діогонали AC, получится сумма

основаній EG + GF двухъ подобныхъ треугольниковъ BEG и DFG, у коихъ высоты BE и FD найдены; потомъ посредствомъ § 134 найдется каждое основаніе EG и GF порознь; и наконецъ какъ въ треугольникѣ EBG, такъ и въ △DFG, сыщутся діогонали BG и GD (§ 175), коихъ сумма будетъ требуемая величина діогонали BD. И такъ естьли положимъ AB = 150, BC = 160, DC = 140, AD = 270, AC = 280, то по § 191 найдется въ треугольникѣ ABC отрѣзокъ AE = 134.46, высота BE = 66.48; а въ треугольникѣ ADC выдетъ отрѣзокъ CF = 44.82, высота FD = 132.62; а по сему сумма отрѣзковъ AE + CF = 134.46 + 44.82 = 179.28, и AC − (AE + CF) = EF = 280 − 179.28 = 100.72; потомъ 64.48 + 132.62 = 197.10 = BE + DF; и для подобія треугольниковъ BEG и FDG будетъ BE + FD : BE = EF : EG, то есть 197.10 : 66.48 = 100.72 : 33.63 = EG, и EF − EG = GF = 100.72 − 33.63 = 67.09; а для прямоугольнаго △BEG, будетъ $\overline{BE}^2 + \overline{EG}^2 = \overline{BG}^2$ = 4418.7904 + 1130.9769 = 5549.7673, и $\sqrt{5549.7673}$ = 74.49 = BG; наконецъ будетъ EG : GF = BG : GD (§ 117), т. е. 33.63 : 67.09 = 74.49 : 148.60 = GD, и слѣдовательно BG + GD = BD = 74.49 + 148.60 = 223.09 = требуемой діогонали BD.

§ 193. ЗАДАЧА. *По извѣстнымъ бокамъ* AB = 180, GC = 130, AC = 70, BC = 60 *найти площадь трапеціи* ABGC. Фиг. 85.

Рѣшен. Изъ точки G, проведя линѣю GF параллельно къ AC, будетъ AF = CG и AC = GF (§ 45); вычти AF или CG изъ AB, останется FB; потомъ въ треугольникѣ FGB, по извѣстнымъ бокамъ BG, FB и FG = AC, найдется вы-

сота GD (§ 191); наконецъ полсуммы параллельныхъ линѣй AB+CG умножа высотою GD, получится требуемая площадь трапеціи ABGC (§ 168). И такъ будетъ $180-130=50=AB-AF=FB$, $FG=AC=70$; а по симъ тремъ извѣстнымъ линѣямъ найдется высота $GD=58.75$; потомъ будетъ $180+130=310=AB+CG$, и $\frac{310}{2}=155=\frac{1}{2}(AB+CG)$; наконецъ $155\times58.75=9106.25=\frac{1}{2}(AB+CG)\times GD=$ площади трапеціи ABGC.

Слѣдств. Изъ сего явствуетъ, когда въ трапеціи площадь и параллельныя линѣи AB и CG будутъ извѣстны, то высота GD найдется, ежели площадь ея на половину суммы параллельныхъ линѣй раздѣлится.

§ 194. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ параллелограммѣ ABDC, сумма квадратовъ изъ всѣхъ его боковъ, равна суммѣ квадратовъ изъ діогоналей.* Фиг. 157.

Доказ. Проведя изъ верха угла A на CD перпендикуляръ AF, а изъ точки C на продолженную BA перпендикуляръ CE, будетъ EC=AF, CF=AE (§ 45). И такъ въ разсужденіи тупоугольнаго треугольника ABC, будетъ $\overline{BC}^2-(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)=2AB\times AE$ (§ 188); а въ разсужденіи треугольника ADC, будетъ $\overline{AC}^2+\overline{CD}^2-\overline{AD}^2=2CD\times CF$ (§ 190) равно $2AB\times AE$; по сему $\overline{BC}^2-(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2-\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{AD}^2$; а придавъ къ первой и послѣдней части $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$, будетъ $\overline{BC}^2=2\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2-\overline{AD}^2$; естьли же придастся къ каждой изъ сихъ частей $\overline{AD}^2$, то будетъ $\overline{BC}^2+\overline{AD}^2=2\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$ (*Ариѳм.* § 26);

то есть сумма квадратовъ изъ діогоналей равна суммѣ квадратовъ изъ всѣхъ боковъ параллелограмма ABDC.

§ 195. ЗАДАЧА. *Въ параллелограммѣ* ABDC *извѣстны бока* AC, CD *и діогональ* BC, *найти другую діогональ* AD. Фиг. 157.

Рѣшен. I. Умноживъ каждой бокъ параллелограмма ABDC квадратно, сложи оные вмѣстѣ; потомъ изъ найденной суммы вычти квадратъ діогонали BC, остатокъ будетъ равенъ квадрату діогонали AD (§ 194), изъ коего извлеки квадратной корень, то получится требуемая діогональ AD. Положимъ CD=AB=230, AC=DB=150, BC=310, то будетъ 230×230 $=52900=\overline{CD}^2=\overline{AB}^2$, по сему 52900×2=105800 $=\overline{CD}^2+\overline{AB}^2$; также 150×150=22500=$\overline{AC}^2=\overline{DB}^2$, и 22500×2=45000=$\overline{AC}^2+\overline{DB}^2$; сумма же всѣхъ квадратовъ будетъ 105800+45000=150800= $\overline{CD}^2+\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{DB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2$ (§ 195); но поелику $\overline{BC}^2$ =310×310=96100, то будетъ 150800−96100 =54700=$\overline{AD}^2$, и $\sqrt{54700}$=233.8=AD.

Второе рѣшеніе сей задачи учинено быть можетъ такимъ же образомъ, какъ въ § 192 показано.

§ 196. ЛЕММА. *Ежели въ какомъ нибудь треугольникѣ* ABC *впишется кругъ* EGH, *и изъ центра* D *опустя перпендикуляръ* DH, *на продолженномъ боку* CA *положится* AF=HB, *то линѣя* CF *будетъ равна половинѣ суммы боковъ треугольника* ABC; *также будетъ равна суммѣ трехъ разностей между половиною суммы боковъ и каждымъ бокомъ треугольника* ABC. Фиг. 158.

Доказ. Поелику EB=BH=AF, CE=CG, AG =AH (§ 77. *Слѣд.*), то будетъ въ треугольникѣ ABC: 1) Сумма боковъ AC+CB+AB=2CG+2AG +2AF, а по раздѣленіи каждой части на 2, будетъ половина суммы боковъ$=\frac{1}{2}$(AC+CB+AB)=CG+AG+AF=CF. 2) Ежели изъ линѣи CF, которая равна полсуммѣ боковъ треугольника, вычтется бокъ AC, то разность будетъ равна AF; но поелику бокъ BC=BE+CE=BH +CE=AF=CG; слѣдовательно, естьли изъ CF вычтется бокъ BC или равное ему AF+CG, то останется AG равное разности между половиною суммы CF и бокомъ BC; также бокъ AB=AH +HB=AG+AF, по сему CF−(AG+AF)=GC =разности между половиною суммы CF и бокомъ AB; слѣдовательно CG+AG+AF=CF; равно суммѣ трехъ разностей между половиною суммы боковъ треугольника ABC, и каждымъ его бокомъ.

Прибавл. Изъ сего удобно видѣть можно, что треугольникъ ABC состоитъ изъ трехъ треугольниковъ ADB, BDC и CDA, коихъ общая высота есть радіусъ DH вписаннаго круга; по сей причинѣ будетъ плоскость треугольника ADC$=\frac{1}{2}$AC×GD, площадь треугольника ADB$=\frac{1}{2}$AB×DH$=\frac{1}{2}$AB×GD, и плоскость △BDC$=\frac{1}{2}$BC×DE $=\frac{1}{2}$BC×DG; слѣдовательно сумма плоскостей сихъ треугольниковъ, составляющихъ плоскость треугольника ABC, будетъ равна $\frac{1}{2}$AC× GD$+\frac{1}{2}$AB×GD$+\frac{1}{2}$BC×GD$=\frac{1}{2}$(AC+AB+BC)×GD =CF×GD, то есть плоскость треугольника равна произведенію изъ полсуммы боковъ онаго CF, и радіуса DG вписаннаго круга. Слѣдо-

вательно площадь всякаго треугольника равна такому параллелограмму, у котораго основаніе CF равно полсуммѣ боковъ треугольника, а высота GD равна радіусу вписаннаго круга.

§ 197. ТЕОРЕМА. *Ежели изъ половины суммы боковъ всякаго треугольника ABC, вычтется каждой бокъ, и произшедшія отъ того разности между собою и чрезъ полсуммы боковъ умножатся, то квадратной корень сего произведенія будетъ равенъ площади треугольника ABC.* Фиг. 158.

Доказ. Дабы доказать, что $\sqrt{(CG \times AG \times AF \times CF)} = CF \times GD$ равенъ площади треугольника ABC; то въ данномъ треугольникѣ ABC опиши кругъ GEH (§ 78); изъ центра D, на бока AC, AB и CB опусти перпендикуляры DG, DH и DE, на продолженной CA положи AF=HB, на концѣ которой поставь перпендикуляръ FL; продолжи CD, пока пересѣчется съ перпендикулярною FL въ точкѣ L; на продолженной CB положи CM=CF, точки M и L соедини прямою линѣею ML; при чемъ будетъ треугольникъ CFL=CML, потому что уголъ FCL=LCM (§ 78), CF=CM по положенію, и CL общій бокъ; по сему FL=LM, и уголъ CFL=CML прямые (§ 26); потомъ положа FK=AH, проведи KL, AL и LB, то будетъ треугольникъ KFL=△BML; ибо CM=CF по положенію; и CB=CG+AF (§ 196), по сему BM=AG=AH=KF (*Ариѳм.* § 32), LF=LM доказано, и уголъ KFL=LMB прямые, слѣдовательно KL=LB (§ 26); также треугольникъ ABL=△ALK, потому что AB=AK по положенію, LB=KL и AL общій бокъ, по сему уголъ LAB=LAK (§ 29). Въ разсужденіижъ равныхъ треуголь-

никовъ AGD и ADH (§ 78), уголъ ADG=ADH; но уголъ GDH+HAG=180° (§ 85), также уголъ BAF+HAG=180° (§ 17), по сему уголъ GDH+HAG=∠BAF+HAG; а отнявъ общій уголъ HAG, останется уголъ GDH=BAF (*Аriѳ.* § 32); слѣдовательно и половина угла GDH равна половинѣ угла BAF, то есть уголъ ADG =FAL, но какъ уголъ AGD=AFL прямые, то будетъ и уголъ GAD=FLA, по сему треугольникъ AGD подобенъ ΔAFL; также треугольникъ CGD подобенъ ΔCFL, потому что ∠FCL общій, уголъ CGD=CFL прямые, и ∠CDG =CLF (§ 48. *Слѣд.* 3). И такъ для подобія треугольниковъ AGD и AFL, будетъ GD:AF =AG:FL (§ 117), при чемъ будетъ GD×FL= AG×AF (*Аriѳм.* § 115); а для подобія треугольниковъ GCD и CFL, будетъ CG:GD=CF: FL; по умноженіиж членовъ перваго содержанія чрезъ CF, а членовъ втораго содержанія чрезъ GD, будетъ CG×CF:GD×CF=GD×CF: GD×FL (*Аriѳм.* § 122. *Приб.* 2); а когда въ сей пропорціи поставится AG×AF на мѣсто GD× FL, то будетъ CG×CF:GD×CF=GD×CF:AG× AF; но поелику сія пропорція составляетъ непрерывную Геометрическую, то въ ней будетъ средній членъ GD×CF=$\sqrt{}$(GC×AG×AF×CF) (*Аriѳм.* § 115. *Слѣд.*); но FD×CF=площади треугольника ABC (§ 196. *Приб.*); слѣдовательно и $\sqrt{}$(CG×AG×AF×CF)=площади треугольника ABC.

§ 198. ЗАДАЧА. *По извѣстнымъ бокамъ* AB, BC *и* AC, *найти площадь треугольника* ABC, *не сыскивая высоты.* Фиг. 158.

Рѣшен. Сложа всѣ бока треугольника ABC вмѣстѣ, сумму ихъ AB+BC+AC раздѣли на

двѣ равныя части, изъ половины суммы сихъ боковъ вычти каждой бокъ порознь; остатки ихъ умножь между собою, и вышедшее отъ того произведеніе умножь половиною суммы боковъ; потомъ изъ сего произведенія извлеки квадратной корень, то получится требуемая плоскость треугольника ABC. И такъ положимъ бокъ AB=200, BC=160, AC=120, то будетъ $200+160+120=480=AB+BC+AC$, и $\frac{480}{2}=240=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$=полсуммѣ боковъ; по сему $240-200=40$=разн. $240-160=80$=разн. и $240-120=120$=разн.; потомъ $120\times80\times40\times240=92160000$, и $\sqrt{92160000}=9600$=площади $\triangle ABC$.

§ 199. ЗАДАЧА. *Извѣстна площадь треугольника* $ABC=2700^\circ$, *а въ другомъ подобномъ треугольникѣ* ADE *извѣстны бока* $AD=80^\circ$, $AE=100^\circ$, $DE=120^\circ$, *найти бока* AB, AC *и* BC *треугольника* ABC. (Фиг. 116.

Рѣшен. По извѣстнымъ бокамъ треугольника ADE, сыскавъ по § 191 или 198 площадь онаго, сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ площадь треугольника ADE содержится къ площади треугольника ABC, такъ площадь квадрата изъ бока DE будетъ содержаться къ площади квадрата изъ бока BC (§ 173); потомъ изъ найденной плоскости квадрата $\overline{BC}^2$ извлеки квадратной корень, получится бокъ BC; наконецъ и величина прочихъ боковъ сыщется чрезъ слѣдующія пропорціи: DE : BC = AE : AC, и DE : BC = AD : AB (§ 117). И такъ сообразуясь съ симъ рѣшеніемъ, найденная площадь $\triangle ADE$ будетъ =3968, и для того будетъ $\triangle ADE : \triangle ABC = \overline{ED}^2 : \overline{BC}^2$, т. е. 3968 : 2700

$=14400:9798=\overline{BC}^2$; по сему $\sqrt{9798}=99=BC$; потомъ для подобія треугольниковъ ADE и ABC будетъ $DE:BC=AE:AC$, то есть $120:99=100:82.5=AC$; также $DE:BC=AD:AB$, то есть $120:99=80:66=AB$.

§ 200. ТЕОРЕМА. *Ежели уголъ EDF одного треугольника DEF, равенъ углу BAC другаго треугольника ABC, то площади сихъ треугольниковъ будутъ содержаться между собою, какъ прямоугольники или произведенія изъ ихъ боковъ DF и DE, AC и AB составляющихъ равные углы.* (Фиг. 159.

Доказ. Изъ верховъ F и C на основанія DE и AB опустя перпендикуляры FQ и CP, будетъ треугольникъ FDQ подобенъ △CAP; потому что уголъ $D=\angle A$, уголъ $DQF=APC$ прямые, и уголъ $DFQ=\angle PCA$ (§ 48. *Слѣд.* 3), и для того будетъ $FQ:CP=DF:AC$ (§ 117); а по умноженіи предыдущихъ членовъ чрезъ DE, а послѣдующихъ чрезъ AB, будетъ $FQ\times DE:CP\times AB=DF\times DE:AC\times AB$ (*Ариѳм.* § 122); наконецъ по раздѣленіи членовъ перваго содержанія на 2, будетъ $\frac{1}{2}FQ\times DE:\frac{1}{2}CP\times AB=DF\times DE:AC\times AB$, т. е. площадь треугольника DEF содержится къ площади треугольника ABC, какъ произведеніе изъ боковъ DF и DE перваго, къ произведенію изъ боковъ AC и AB втораго треугольника.

О сравненіи плоскостей посредствомъ пропорціональныхъ линѣй относителныхъ къ кругу.

§ 201. *Опредѣл.* Въ кругѣ всякая линѣя GH, стоящая на діаметрѣ EF перпендикулярно, называется *Полупоперешникомъ круга*; а ча-

сти EH и HF діаметра EF, именуются *Отрѣзками онаго.* *Фиг.* 160.

§ 202. ТЕОРЕМА. *Плоскость квадрата* AH *всякаго полупоперешника* GH *круга равна прямоугольнику, коего основаніе* BC *равно отрѣзку* HF, *а высота* BH *равна отрѣзку* EH *діаметра* EF. Фиг. 160.

Доказ. Мы уже вѣ § 125 видѣли, что $EH : HG = HG : HF$; а какѣ вѣ сей пропорціи $EH \times FH = HG \times HG$ (*Ариѳм.* § 115. *Приб.*), то будетѣ $EH \times HE = \overline{HG}^2 = HF \times HB$ (*Ариѳм.* § 42); но $\overline{HG}^2 =$ площади квадрата AGHI и $BC \times HB =$ плоскости прямоугольника BCFH (§ 160); слѣдовательно квадратѣ полупоперешника HG, равенѣ прямоугольнику изѣ отрѣзковѣ EH и HF діаметра EF.

Слѣдств. I. Изѣ сего же явствуетѣ, что квадратѣ хорды EG равенѣ прямоугольнику DEFC, коего основаніе равно діаметру EF, а высота DE равна отрѣзку EH, находящемуся между концемѣ E хорды EG и опущеннымѣ изѣ другаго ея конца G перпендикуляромѣ GH. Ибо треугольникѣ EGH подобенѣ треугольнику EGF (§ 121), и для того будетѣ $EH : EG = EG : EF$ (§ 117); при чемѣ будетѣ $EH \times EF = \overline{EG}^2 = DC \times DE$ (*Ариѳм.* § 115. *Приб.*). Также докажется, что квадратѣ изѣ хорды GF равенѣ прямоугольнику изѣ діаметра EF и сходственнаго отрѣзка HF, то есть $EF \times HF = \overline{FG}^2$.

Слѣдств. II. Поелику HG есть средняя пропорціональная между EH и HF, также EG есть средняя пропорціональная между EH и EF (§ 125); то изѣ сего явствуетѣ, что квадратѣ изѣ средней всегда равенѣ прямоуголь-

нику изъ первой и третьей линѣи, непрерывной Геометрической пропорціи; и слѣдовательно въ первомъ случаѣ будетъ $\sqrt{HF \times HE} = \sqrt{\overline{HG}^2}$ $= HG$, а во второмъ $\sqrt{HE \times EF} = \sqrt{\overline{EG}^2} = EG$.

§ 203. ЗАДАЧА. *Въ полукругѣ* EGF *извѣстны части* EH=40° *и* HF=160° *діаметра* EF, *найти полупоперешникъ* GH *и хорду* EG. (Фиг. 160.

Рѣшен. Поелику площадь прямоугольника HBCF изъ отрѣзковъ EH и HF, равна квадрату AGHI изъ полупоперешника HG (§ 202); то умноживъ EH на HF, получится площадь квадрата AGHI изъ полупоперешника GH, коего квадратной корень будетъ равенъ HG. Для сысканія же хорды EG, умноживъ діаметръ EF отрѣзкомъ EH, получится площадь прямоугольника EDCF, равнаго площади квадрата хорды EG (§ 202), коего квадратной корень будетъ равенъ хордѣ EG, какъ-то: 40×160 $= 6400 = EH \times HF = \overline{HG}^2$, и $\sqrt{6400} = 80 = HG$; также $40 + 160 = 200 = EH + HF = EF$; а по сему $200 \times 40 = 8000 = EF \times HE = \overline{EG}^2$, и слѣдовательно $\sqrt{8000} = 89.44 =$ хордѣ EG.

Такимъ же образомъ по извѣстнымъ частямъ діаметра сыщется и другая хорда GF.

Слѣдств. Ежели часть FH діаметра EF, и хорда EG будутъ извѣстны, то діаметръ EF сыщется, когда квадратъ изъ хорды EG равный прямоугольнику DCFE, на отрѣзокъ EH=ED, раздѣлится; потомъ будетъ EF—EH=HF; а наконецъ согласуясь съ рѣшеніемъ сей задачи, найдется HG.

§ 204. ТЕОРЕМА. *Когда въ кругѣ* ACBD *двѣ хорды* AB *и* CD *взаимно пересѣкутся, то пря*

моугольникъ изъ частей AE *и* EB *одной, будетъ равенъ прямоугольнику изъ частей* CE *и* ED *другой хорды.* Фиг. 161.

Доказ. Точки A и D, также B и C соединя прямыми линѣями AD и BC, будетъ треугольникъ ADE подобенъ △BEC, потому что уголъ DAE=∠ECB, уголъ ADE=∠EBC (§ 71. *Слѣд.* 1), и уголъ DEA=∠BEC (§ 21); а для того будетъ AE:EC=DE:EB (§ 117), при чемъ будетъ EB×AE=DE×EC (*Ариѳм.* § 115), то есть площадь прямоугольника сдѣланнаго изъ линѣй EB и AE равна площади прямоугольника, коего основаніе EC а высота ED (§ 160).

Изъ предписанной пропорціи видно, что части одной хорды означаютъ крайніе члены, и части другой занимаютъ мѣста среднихъ членовъ, и слѣдовательно обратно пропорціональны.

Прибавл. Ежели части CE и DE хорды DC, и часть AE хорды AB будутъ извѣстны, то другая часть EB сыщется, когда часть DE умножится на CE, а потомъ сіе произведеніе (которое равно EB×AE) на часть AE раздѣлится.

§ 205. ТЕОРЕМА. *Когда изъ точки* C, *лежащей внѣ круга, проведутся два секанса* AC *и* BC, *то прямоугольникъ изъ наружной части* CD *и всего секанса* AC, *будетъ равенъ прямоугольнику изъ наружной части* CE *и всего секанса* BC. Фиг. 162.

Доказ. Точки A и B, также D и E соединя прямыми линѣями AB и DE, треугольники DEC и ABC будутъ подобны; потому что уголъ DEC=CAB измѣряются половиною дуги DEB (§ 71 и 75), уголъ C общій, и уголъ EDC=ABC (§ 48. *Слѣд.* 3); а для того будетъ DC:BC

=CE : AC (§ 117); при чемъ будетъ AC×DC=BC ×CE (*Ариѳм.* § 115), то есть площадь прямоугольника AHGC, коего основаніе есть секансъ AC, а высота CG=DC, равна площади прямоугольника CFKB, коего основаніе равно секансу BC, а высота FC=CE.

Прибавл. Ежели части CE и EB секанса CB и наружная часть CD секанса AC будутъ извѣстны, то величина секанса AC найдется; ибо умножа секансъ CB наружною частію CE, получится площадь прямоугольника CK, которая будетъ равна площади прямоугольника CH а по раздѣленіи сей площади на высоту CG= CD, получится секансъ AC (§ 164).

§ 206. ТЕОРЕМА. *Ежели изъ точки C лежащей внѣ круга, проведутся касательная* CF *и секансъ* AC, *то квадратъ изъ касательной* CF *будетъ равенъ прямоугольнику изъ секанса* AC *и наружной его части* CD. (Фиг. 163.

Доказ. Изъ касательной точки F къ точкамъ A и D проведи хорды AF и FD, то будетъ треугольникъ ACF подобенъ △DCF; ибо уголъ CAF =DFC, каждой измѣряется половиною дуги DF (§ 71 и 72), уголъ C общій, и уголъ AFC=FDC (§ 48. *Слѣд.* 3); и для подобія сихъ треугольниковъ будетъ DC : CF=CF : AC (§ 117); при чемъ будетъ $\overline{CF}^2$=DC×AC (*Ариѳм.* § 115), то есть площадь квадрата изъ касательной CF, равна площади прямоугольника AEBC, котораго основаніе AC есть секансъ, а высота CB равна DC.

Слѣдств. Изъ сего видно, что касательная CF есть средняя пропорціональная между наружною частію CD и цѣлымъ секансомъ AC.

§ 207. ЗАДАЧА. *Извѣстны части* CD=40°, AD=50°, *секанса* AC, *найти касательную* CF. Фиг. 163.

Рѣшен. Поелику по предыдущей теоремѣ квадратъ изъ касательной CF, равенъ прямоугольнику AB, коего основаніе AC, а высота DC=BC; по сей причинѣ сложивъ CD съ AD, сумму ихъ AC, изображающую секансъ, умножь наружною частію CD, то сіе произведеніе AC×DC будетъ равно квадрату изъ касательной CF. Наконецъ изъ площади сего, найденной квадратной корень будетъ равенъ CF. Какъ-то: 40+50=90=CD+AD=AC, и 90×40=3600 =AC×DC=$\overline{CF}^2$, наконецъ $\sqrt{3600}$=60°=CF (§ 161. *Слѣд.*).

Прибавл. Ежели касательныя CF и секансъ AC будутъ извѣстны, то наружная часть CD найдется, когда квадратъ изъ касательной CF, раздѣлится на секансъ AC.

§ 208. ЗАДАЧА. *Въ прямоугольномъ треугольникѣ* ABC, *высота* BC *и сумма діогонали* AB *съ основаніемъ* AC *вообще извѣстны, найти діогональ* AB *и основаніе* AC. Фиг. 164.

Рѣшен. Изъ точки A, радіусомъ AC опиши кругъ CED, продолжи BA до E, будетъ AC= AE, и AB+AC=AB+AE=BE; линѣя BC будетъ касательная (§ 67). И такъ когда BC умножится квадратно, то получится площадь такого прямоугольника, коего основаніе BE= AB+AC, а высота равна BD (§ 206); слѣдовательно естьли сія площадь раздѣлится на сумму боковъ, которая равна BE, то частное будетъ равно DB; потомъ вычтя DB изъ BE,

останется діаметръ ED; наконецъ будетъ $\frac{1}{2}DE=AD=AC$, и $DB+DA=AB$.

Положимъ $BC=210'$, $AB+AC=BE=490'$, то будетъ $\overline{BC}^2=44100'=DB\times EB$; по сему $\frac{44100}{490}=90'=DB$; $BE-BD=DE=490-90=400'$, и $\frac{400}{2}=200=AD=AC$, и наконецъ $AD+DB=AB=200+90=290'$.

§ 209. ЗАДАЧА. *Въ прямоугольномъ треугольникѣ ABC, перпендикуляръ BC и разность BD діогонали AB и основанія AC извѣстны, найти AC и AB.* Фиг. 164.

Рѣшен. Изъ точки A радіусомъ AC опиши кругъ CDE, продолжи BA до E, то линѣя BC будетъ касательная (§ 67); по сей причинѣ умноживъ перпендикуляръ BC квадратно, площадь сего квадрата раздѣли на разность BD, получится величина секанса BE, изъ коего вычтя BD, останется діаметръ DE; а раздѣля оной на двѣ равныя части, частное будетъ равно $AD=AC$, и наконецъ $AD+BD=AB$.

Истинну сего рѣшенія видѣть можно изъ § 206.

§ 210. ТЕОРЕМА. *Ежели изъ точки A, взятой на окружности, проведутся двѣ хорды AB и AC и третья FD пересѣчетъ ихъ такъ, что дуга AF=AD, то будетъ прямоугольникъ изъ отрѣзка AG и хорды AB, равенъ прямоугольнику изъ отрѣзка AE и хорды AC; и каждой изъ сихъ прямоугольниковъ будетъ равенъ квадрату изъ хорды AF.* Фиг. 165.

Доказ. I. Точки B и C соединя прямою линѣею BC, будетъ треугольникъ AGE подобенъ $\triangle ABC$; потому что уголъ BAC общій, уголъ $C=\angle AGE$; ибо мѣра угла $C=\frac{1}{2}$ дуги $BF+\frac{1}{2}AF=\frac{1}{2}BF+\frac{1}{2}AD$ (§ 71); а мѣра угла $AGE=\frac{1}{2}$ дуги

BF $+\frac{1}{2}$AD (§ 73); и уголъ ABC=GEA (§ 48. *Слѣд.* 3); а для подобія сихъ треугольниковъ будетъ AG : AC=AE : AB (§ 117); причемъ будетъ AB×AG=AC×AE (*Ариѳм.* § 115), т. е. прямоугольникъ составленной изъ линѣй AB и AG= прямоугольнику изъ линѣй AC и AE (§ 160).

Доказ. II. Точки B и F соединя прямою линѣею BF, будетъ треугольникъ AFG подобенъ △AFB, потому что уголъ FAB общій, уголъ AFD=∠ABF, измѣряются половиною равныхъ дугъ AD и AF, и уголъ AGF=AFB (§ 48. *Слѣд.* 3); а для подобія сихъ треугольниковъ будетъ AG : AF=AF : AB (§ 117); при чемъ будетъ AB×AG=$\overline{AF}^2$=AC×AE.

§ 211. ТЕОРЕМА. *Всякаго четверосторонника* ABCD *вписаннаго въ кругѣ, прямоугольникъ изъ діогоналей* AC *и* DB, *равенъ суммѣ прямоугольниковъ изъ противулежащихъ боковъ* AB *и* CD, BC *и* AD. (Фиг. 166.

Доказ. Положимъ что уголъ ABD будетъ меньше угла DBC, то сдѣлавъ уголъ FBC= ABD, будетъ треугольникъ BFC подобенъ △ABD, потому что уголъ BCA=BDA (§ 71. *Слѣд.* 1), уголъ FBC=ABD по положенію, и уголъ BFC=BAD (§ 48. *Слѣд.* 3); и такъ для подобія сихъ треугольниковъ, будетъ FC : AD =BC : BD (§ 117); при чемъ будетъ BC×AD= FC×BD. Равнымъ образомъ треугольникъ ABF подобенъ △BDC; ибо уголъ BAF=BDC (§ 71. *Слѣд.* 1), а придавъ уголъ EBF къ углу ABE и къ углу CBF, будетъ уголъ ABF=DBC, и уголъ AFB=BCD (§ 48. *Слѣд.* 3); а для подобія сихъ треугольниковъ будетъ AB : BD=AF : DC (§ 117); при чемъ будетъ AB×DC=BD×AF;

а когда сіи произведенія сложатся съ первыми, то будетъ $BC \times AD + AB \times DC = BD \times FC + BD \times AF$. Но поелику $BD \times FC + BD \times AF = (FC + AF) \times BD = AC \times BD$ (*Ариѳм.* § 36); слѣдовательно $BC \times AD + AB \times DC = AC \times BD$, то есть прямоугольникъ изъ боковъ BC и AD съ прямоугольникомъ изъ боковъ AB и DC, равны прямоугольнику изъ діогоналей AC и BD.

§ 912. ЗАДАЧА. *Въ прямоугольникѣ* ABCD, *извѣстна площадь и сумма боковъ* AB+BC, *найти оные бока порознь.* (Фиг. 167.

Рѣшен. На продолженной BC положи $BF = AB$, и раздѣля FC на двѣ равныя части въ точкѣ G, радіусомъ GF опиши полкруга; потомъ продолжа AB до E, будетъ $BC \times AB = \overline{BE}^2 = BC \times BF$ (§ 202), то есть площадь прямоугольника ABCD равна площади квадрата изъ полупоперешника BE; но поелику величина радіуса $EG = \frac{1}{2}CF$ извѣстна, то умноживъ радіусъ FG квадратно, вычти изъ него $\overline{BE}^2$, то есть площадь прямоугольника ABCD, останется $\overline{BG}^2$ (§ 174. *Приб.* 2), и слѣдовательно $\sqrt{\overline{BG}^2} = BG$; а наконецъ будетъ $BG + GC = BC$, и $FG - BG = BF = AB$ (*).

Прибавл. Такимъ же образомъ по извѣстной площади и суммѣ боковъ AB+AD прямоугольнаго треугольника ABD найдутся бока

(*) Въ послѣдующихъ задачахъ сего отдѣленія, рѣшеній числами не прилагается; ибо опредѣляя произвольнымъ числомъ извѣстныя части Геометрическихъ плоскостей, удобно можно, руководствомъ каждаго предположеннаго рѣшенія, сыскивать числами неизвѣстныя части.

онаго; ибо удвоивъ площадь треугольника ABD, получится площадь прямоугольника ABCD; а потомъ по предыдущей задачѣ сыщутся бока AB и BC=AD; наконецъ по § 175му найдется діогональ BD.

§ 213. ЗАДАЧА. *По извѣстной площади прямоугольника* ABCD *и разности* FD *боковъ* AD —AB, *найти бока* AB *и* AD. (Фиг. 168.

Рѣшен. Продолживъ AD и раздѣля FD пополамъ въ точкѣ E, радіусомъ EA опиши полкруга AMN; продолжи CD до M, будетъ $\overline{DM}^2$ равенъ площади даннаго прямоугольника ABCD (§ 202); потомъ умноживъ $\frac{1}{2}$FD=DE квадратно, сложи съ квадратомъ полупоперешника DM, то есть съ данною плоскостію прямоугольника ABCD, получится $\overline{DM}^2+\overline{DE}^2=\overline{EM}^2$ (§ 174), и слѣдовательно будетъ $\sqrt{\overline{EM}^2}$=EM (§ 161. *Слѣд.*)=EA; а наконецъ будетъ AE—EF=AF =AB, и AE+ED=AD.

§ 214. ЗАДАЧА. *Извѣстны части* CE *и* BE *секанса* BC, *и часть* AD *другаго секанса* AC, *найти наружную часть* DC. (Фиг. 162.

Рѣшен. Сумму частей CE+BE=BC умноживъ черезъ CE, будетъ BC×CE=AC×CD равно площади прямоугольника ACGH, коего основаніе AC, а высота CG=CD (§ 205); потомъ по извѣстной площади сего прямоугольника, и разности боковъ AC—DC=AD, найдется AC и CG=CD (§ 213).

Прибавл. I. Ежели даны будутъ касательная CF и внутренняя часть AD секанса AC (*фиг.* 163), то сыщется наружная онаго часть DC; ибо умножа CF квадратно, получится площадь прямоугольника AB (§ 206), коего раз-

ность боковъ AC—BC=AC—DC=DA извѣстна, слѣдовательно сыщется AC и BC=CD (§ 213).

§ 215. ЗАДАЧА. *Въ кругѣ AFBCD, изъ точки A, проведены двѣ хорды AB и AC и третья ED пересѣкаетъ ихъ такъ, что дуга AF=AD; извѣстны части AG и BG хорды AB, и часть EC хорды AC, найти хорду AF и часть AE хорды AC.* (Фиг. 165.

Рѣшен. Поелику мы уже въ § 210 доказали, что прямоугольникъ изъ линѣй AB и AG, равенъ квадрату изъ хорды AF, и равенъ прямоугольнику изъ линѣй AE и AC; то по сей причинѣ умноживъ AB чрезъ AG, получится площадь квадрата изъ линѣи AF, также и площадь прямоугольника изъ линѣй AE и AC; слѣдовательно, когда изъ площади квадрата $\overline{AF}^2$, извлечется квадратной корень, то получится хорда AF. Наконецъ по извѣстной площади прямоугольника изъ линѣй AE и AC, и разности боковъ AC—AE=EC, найдется часть AE (§ 913).

§ 216. ЗАДАЧА. *По извѣстнымъ бокамъ AB, AC и BC, треугольника ABC, найти радіусъ BD описаннаго круга.* (Фиг. 169.

Рѣшен. Изъ точки B опустя перпендикуляръ BE на бокъ AC, по извѣстнымъ бокамъ AB, AC и BC сыщи величину перпендикуляра BE (§ 191), потомъ изъ центра D опусти перпендикуляръ DF на бокъ BC, будетъ треугольникъ ABE подобенъ △DBF, потому что уголъ BAE=∠BDF, каждой измѣряется половиною дуги BGC, уголъ AEB=BFD прямые и уголъ ABE=DBF (§ 48. *Слѣд.* 3); и такъ раздѣля бокъ BC на двѣ равныя части, получится BF (§ 59. *Слѣд.* 2); потомъ для подобія предпи-

санныхъ треугольниковъ, чрезъ слѣдующую пропорцію EB : BF = AB : BD, найдется радіусъ BD (*Ариѳм.* § 132).

§ 217. ЗАДАЧА. *Въ прямоугольномъ треугольникѣ* ABC, *извѣстны діогональ* BC *и сумма перпендикуляровъ* AB+AC, *найти оные порознь.* (Фиг. 170.

Рѣшен. На продолженной AC сдѣлай AE = AB, будетъ EC = AC + AB; потомъ начертя на діогонали BC и на линѣи EC квадраты BD и EG, продолжи AB до I и проведи діогональ EG, которая съ продолженною AB пересѣчется въ точкѣ F; чрезъ точку F, проведи HFM параллельно къ EC, то четвероспоронники HA и MI будутъ квадраты; потому что уголъ CEF = CGF = 45° = ∠EFA = GFM (§ 43. *Слѣд.* 1), по сему AE = AF; также MF = MG (§ 51) = AC. И такъ умножа AB + AC = EC квадратно, произведеніе будетъ означать площадь квадрата EKGC, которой $= \overline{EA}^2 + \overline{AC}^2 + AM + KF = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AC \times AE$ (187); но поелику $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 =$ HA + IM; слѣдовательно, естьли діогональ BC умножится квадратно, то получится сумма квадратовъ $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = AH + MI$; а когда сумма сихъ квадратовъ вычтется изъ $\overline{EC}^2$, то остатокъ будетъ равенъ AM + KF = 2AM, которое раздѣля пополамъ, получится площадь прямоугольника AM; и наконецъ по извѣстной площади сего прямоугольника и суммѣ боковъ AF + AC, посредствомъ § 212 найдется основаніе AC и бокъ AF = AB.

§ 218. ЗАДАЧА. *Площадь двухъ квадратовъ* AK+BL *вообще и сумма боковъ* AB+BC *извѣстны, найти каждой бокъ* AB *и* BC *порознь.* (Фиг. 171.

Рѣшен. Начертя на линѣи AC квадратЪ ACDF, проведи діогональ CF, и продолжи KB до E, проведи чрезЪ точку Q линѣю GN параллельно кЪ AC, будетЪ квадратЪ BG=BL и квадратЪ NE=AK. И такЪ умножа AC квадратно, будетЪ $\overline{AC}^2$=ACDF=BG+NE+NB+DQ; потомЪ изЪ сей площади вычти данную сумму плоскостей AK+BL=NE+BG, остатокЪ будетЪ равенЪ NB+DQ; но DQ=NB (§ 187), по сему NB+DQ=2NB. Найденную сумму сихЪ прямоугольниковЪ раздѣля пополамЪ, получится площадь прямоугольника ABQN; вЪ которомЪ по извѣстной суммѣ боковЪ AB+BQ, сыщется каждой бокЪ AB и BQ=BC (§ 212).

§ 219. ЗАДАЧА. *ВЪ треугольникѣ* ABC, *извѣстна площадь, основаніе* AB *и сумма боковЪ* AC+BC, *найти оные бока порознь.* Фиг. 158.

Рѣшен. ВЪ треугольникѣ ACB описавЪ кругЪ EGH (§ 78), продолжи бокЪ CA, такЪ чтобЪ AF равна была BH, то будетЪ CF равна полсуммѣ боковЪ AC+CB+BA, также AG=AH (§ 196); по сему AB=FG, которую вычтя изЪ полсуммы боковЪ CF, останется GC=CE; потомЪ площадь треугольника ABC раздѣля на полсуммы боковЪ CF, частное будетЪ равно радіусу DG=DE (§ 196. *Приб.*). ВЪ прямоугольномЪ треугольникѣ CGD сыщется діогональ GD (§ 175) и перпендикулярЪ GR (§ 191); а по извѣстной GR и GC прямоугольнаго треугольника GCR, найдя высоту CR, умножь оную чрезЪ $\frac{1}{2}$GE=GR, то произведеніе будетЪ равно площади треугольника GEC, которой сЪ треугольникомЪ ACB, имѣетЪ общій уголЪ C; и для того будетЪ △GEC:△ACB=GC×CE или

$\overline{GC}^2$: AC×BC (§ 200); наконецъ по найденной плоскости прямоугольника изъ линѣй AC и BC и суммѣ его боковъ AC+BC, сыщутся оные бока порознь (§ 212).

О измѣреніи плоскостей правильныхъ многоугольниковъ и круговъ.

§ 220. ТЕОРЕМА. *Плоскость всякаго правильнаго многоугольника* ABDEF *равна произведенію изъ полсуммы боковъ многоугольника, на перпендикуляръ* CK, *опущенной изъ центра* C *на одинъ изъ его боковъ.* (Фиг. 172.

Доказ. Пусть будетъ правильной пятиугольникъ ABDEF, въ которомъ, ежели изъ центра C, ко всѣмъ угламъ проведутся радіусы AC, BC и проч., то многоугольникъ раздѣлится на столько равныхъ между собою треугольниковъ ABC, BCD и проч., сколько многоугольникъ ABDEF боковъ имѣетъ (§ 99. *Слѣд.* 1); по сему пяти-угольникъ ABDEF = 5△ABC; плоскость же треугольника ABC = $\frac{AB}{2}$×CK (§ 160. *Слѣд.*); слѣдовательно площадь всего многоугольника ABDEF = $\frac{5AB}{2}$×CK; но поелику $\frac{5AB}{2}$ = $\frac{1}{2}$(AB+BD+DE+EF+FA) означаетъ полсуммы боковъ многоугольника, а CK есть перпендикуляръ, опущенной изъ центра C на бокъ AB; слѣдовательно площадь правильнаго многоугольника ABDEF, равна произведенію изъ полсуммы боковъ, на перпендикуляръ CK, опущенный изъ центра C, на одинъ изъ его боковъ AB.

Прибавл. I. Изъ сего явствуетъ, что всякой правильной многоугольникъ, какъ здѣсь ABDEF, равенъ такому треугольнику ACG,

коего основаніе $AG = 5AB$ равно суммѣ боковъ, а высота равна перпендикуляру CK, опущенному изъ центра C на бокъ AB; и равенъ также параллелограмму, коего основаніе $AL = \frac{1}{2}AG$ равно полсуммѣ боковъ, а высота тотъ же перпендикуляръ CK; ибо плоскость треугольника ACG, также и прямоугольника $ACIL = \frac{1}{2}AG \times CK = \frac{5AB}{2} \times CK$ (§ 162).

Прибавл. II. Изъ того же удобно разумѣть можно, что плоскость правильнаго многоугольника, какъ здѣсь пяти-угольника ABDEF, равна такому квадрату AMOH, котораго бокъ AM, есть средняя пропорціональная линѣя между половиною суммы боковъ AL и высотою $CK = AP$; ибо тогда будетъ $AL : AM = AM : AP$ или CK (§ 125), и притомъ $AL \times CK = \overline{AM}^2$ (§ 202); но $AL \times CK$ равно параллелограмму ACIL (§ 162) равно площади пяти-угольника ABDEF; слѣдовательно и $\overline{AM}^2$ равенъ пяти-угольнику ABDEF.

§ 221. ЗАДАЧА. *По извѣстному боку* AB *правильнаго осьми-угольника* ABGFH, *найти площадь онаго.* Фиг. 94.

Рѣшен. При начертаніи правильнаго осьми-угольника ABGFH мы уже видѣли, что $\frac{1}{2}AB = BC = CD$, и $DB = DE$ (§ 109); по сей причинѣ раздѣли величину даннаго бока AB на двѣ равныя части, частное будетъ равно $CB = CD$; и въ прямоугольномъ треугольникѣ BCD, по извѣстнымъ бокамъ BC и CD найдется діогональ $BD = DE$ (§ 175), которую сложа съ DC, получится перпендикуляръ EC, опущенной изъ центра E на бокъ AB восьми-угольника ABGFH; наконецъ полсуммы боковъ многоуголь-

ника умноживъ перпендикуляромъ EC, получится требуемая площадь правильнаго восьми-угольника ABGFH$=\frac{8AB}{2}\times EC=4AB\times EC$.

§ 222. ЗАДАЧА. *По данному боку AB правильнаго двенадцати-угольника ABF, найти его площадь.* Фиг. 96.

Рѣшен. При начертаніи сего многоугольника въ § 111, мы уже видѣли, что бокъ BE равностороннаго треугольника ABE$=$ED; по сей причинѣ сыскавъ высоту EC равностороннаго треугольника ABE (§ 178), сложи оную съ ED, то получится перпендикуляръ DC, опущенной изъ центра D на бокъ AB; потомъ величину, означающую полсуммы боковъ, умноживъ перпендикуляромъ DC, получится требуемая площадь правильнаго двенадцати-угольника ABF$=\frac{12AB}{2}\times DC=6AB\times DC$.

Прибавл. Посредствомъ сихъ двухъ предыдущихъ задачъ, сообразжаясь съ начертаніями, легко найти можно площадь 16ти и 24хъ-угольника.

§ 223. ЗАДАЧА. *По извѣстному радіусу BC правильнаго восьми-угольника BADE, найти площадь онаго.* Фиг. 93.

Рѣшен. и *Доказ.* Проведя радіусы CE и CD, точки D и B соедини прямою линѣею DB, то будетъ уголъ BCE$=$ECD$=45°$ (§ 101. *Слѣд* 2); по сему уголъ DCB$=90°$, и уголъ DBC$=$CDB $=45°$ (48. *Слѣд*. 5). И такъ въ прямоугольномъ треугольникѣ BCD, по извѣстнымъ бокамъ BC и CD найдется DB (§ 175), которую раздѣля пополамъ, частное будетъ равно DE $=$FC (§ 51), и CE$-$CF$=$EF; потомъ въ треугольникѣ DEF, по извѣстнымъ DF и FE сы-

щется DE (§ 175); а по извѣстнымъ бокамъ равнобедреннаго треугольника DEC, найдется высота GC; и наконецъ полсуммы боковъ правильнаго восьми-угольника, умноживъ высотою CG, получится требуемая площадь правильнаго восьми-угольника BADE (§ 221).

§ 224. ЗАДАЧА. *По данному радіусу* AD *правильнаго двѣнадцати-угольника* AGEBC, *найти онаго площадь.* (Фиг. 95.

Рѣшен. Проведя радіусы DC и DB, точки A и B соедини прямою линѣею AB, то треугольникъ ADB будетъ равносторонній, потому что уголъ ADC=CDB=30° (§ 101. *Слѣд.* 2), по сему уголъ ADC+∠CDB=ADB=60°, и уголъ DAB=ABD (§ 28) равенъ 60°; слѣдовательно уголъ AID=DIB прямые (§ 48. *Слѣд.* 3), и DI перпендикулярна къ AB. И такъ по извѣстному боку AB=AD равносторонняго треугольника ABD, сыщется высота DI (§ 178), и будетъ DC—DI=IC, и $\frac{1}{2}$AB=AI; въ прямоугольномъ треугольникѣ AIC, по извѣстной CI и AI, найдется бокъ AC (§ 175); наконецъ по извѣстнымъ бокамъ равнобедреннаго треугольника ACD сыщется высота DN, которою умножа половину суммы боковъ, получится требуемая площадь правильнаго многоугольника AGEBC=6AC×DN (§ 222).

§ 225. ЗАДАЧА. *По данному радіусу* FB, *найти бокъ* IK, *всякаго правильнаго многоугольника описаннаго около круга.* (Фиг. 99.

Рѣшен. Положимъ, что должно найти бокъ IK, описаннаго около круга правильнаго шести-угольника; но поелику радіусъ FB равенъ боку AB вписаннаго въ кругѣ шести-угольника

(§ 103), то надлежитъ сперва, по извѣстнымъ бокамъ равносторонняго треугольника ABF, сыскать перпендикуляръ FG; потомъ слѣлавъ слѣдующую пропорцію FG:FH=AB:IK, найдется бокъ IK правильнаго шести-угольника, описаннаго около круга (*Ариѳм.* § 132).

Примѣч. Такимъ же образомъ по извѣстному радїусу круга найдется бокъ всякаго правильнаго многоугольника, естьли только, по извѣстному радїусу круга, сперва посредствомъ предыдущихъ задачь, сыщется бокъ и перпендикуляръ отъ центра вписаннаго въ кругѣ правильнаго многоугольника; а потомъ составится предписанная пропорція.

§ 226. ТЕОРЕМА. *Квадратъ бока* AB *правильнаго пяти-угольника* ABLIM, *равенъ суммѣ квадратовъ бока* BG *шести-угольника, съ квадратомъ бока* AC *правильнаго десяти-угольника, вписанныхъ въ одномъ кругѣ.* (Фиг. 173.

Доказ: Изъ центра G опустя на бокъ AB правильнаго пяти-угольника перпендикуляръ GC, а на проведенную хорду AC, перпендикуляръ GD; потомъ начертя на боку AB квадратъ ABKF, проведи EH параллельно къ AF, то будетъ треугольникъ BGE подобенъ треугольнику AGB; потому что уголъ ABG есть общій, уголъ EGB=GAB=54°; ибо дуга BC =36°, и дуга DC=18° (§ 59. *Слѣд.* 2); по сему дуга BC+DC=54°=∠EGB равно половинѣ угла при окружности, то есть равно $\frac{180-72}{2}$ =54°=∠GAB и уголъ BEG=BGA (§ 48. *Слѣд.* 3); и для того будетъ EB:BG=BG:AB (§ 117), при чемъ будетъ AB×EB=$\overline{BG}^2$=EB×EH, то есть прямоугольникъ EBKH равенъ квадрату изъ радїуса GB, которой равенъ боку правильна-

го шести-угольника (§ 103). Также треугольникъ AEC подобенъ треугольнику ABC; ибо уголъ BAC есть общій; но какъ треугольникъ AED=△DEC, потому что бокъ AD=DC (§ 59. *Слѣд.* 2), DE общій бокъ, и уголъ ADE=CDE прямые, по сему уголъ ECA=CAB (§ 26) равенъ CBA (§ 28), слѣдовательно уголъ ECA=CBA, и уголъ AEC=ACB (§ 48. *Слѣд.* 3); и для того будетъ AE:AC=AC:AB (§ 177); причемъ AE $\times AB = \overline{AC}^2 = AE \times EH$, то есть прямоугольникъ AEHF равенъ квадрату изъ бока AC правильнаго десяти-угольника; естьли же части сего уравненія сложатся съ частьми перваго, то будетъ прямоугольникъ EBKH+AEHF= $ABKF = \overline{AB}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{AC}^2$, то есть квадратъ изъ бока AB пяти-угольника, равенъ суммѣ квадратовъ изъ бока BG шести-угольника съ квадратомъ изъ бока AC правильнаго десяти-угольника, вписанныхъ въ одномъ кругѣ.

§ 227. ТЕОРЕМА. *Квадратъ діогонали AI съ квадратомъ бока AB правильнаго пяти-угольника ABI, впятеро больше квадрата радіуса AG.* (Фиг. 173.)

Доказ. Изъ верха I на основаніе AB, опусти перпендикуляръ IC, которой пройдя чрезъ центръ G, раздѣлитъ бокъ AB на двѣ равныя части (§ 59. *Слѣд.* 2), и проведенная хорда AC будетъ равна боку десяти-угольника. И такъ для прямоугольнаго треугольника ACI будетъ $\overline{AC}^2 + \overline{AI}^2 = \overline{CI}^2$; но CI=2CG, по сему $\overline{CI}^2 = 4\overline{CG}^2$, и $\overline{AC}^2 + \overline{AI}^2 = 4\overline{CG}^2$; также $\overline{AB}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{AC}^2$ (§ 226); естьли же части перваго равенства сложатся съ частьми втораго, то будетъ $\overline{AC}^2 + \overline{AI}^2 + \overline{AB}^2 = 5\overline{CG}^2 + \overline{AC}^2$;

а отнявъ отъ обѣихъ частей $\overline{AC}^2$, останется $\overline{AB}^2+\overline{AI}^2=5\overline{CG}^2=5\overline{AG}^2$, то есть сумма квадратовъ изъ діогонали AI съ квадратомъ бока AB, равна пяти квадратамъ изъ радіуса AG, и слѣдовательно впятеро больше квадрата радіуса AG правильнаго пяти-угольника.

§ 228. ЗАДАЧА. *По извѣстному боку* AB, *найти діогональ* AG, *радіусъ* AM *и площадь правильнаго пяти-угольника* AGB. (Фиг. 194.

Рѣшен. I. Данной бокъ AB раздѣли по наружной посредственной пропорціи (§ 140); придай къ боку AB среднюю BC, получишь AB+CB=AC равно діогонали AG (§ 143), которая сыщется слѣдующимъ образомъ: въ прямоугольномъ треугольникѣ DBE, по извѣстной $DB=\frac{1}{2}AB$, и BE=AB сыщется DE=DC (§ 175), будетъ DC+AD=AC равно AG=BG; потомъ умножь діогональ AG квадратно, и бокъ AB квадратно, сумму сихъ квадратовъ раздѣли на 5 равныхъ частей, частное будетъ равно площади квадрата изъ радіуса AM (§ 227), изъ коего извлеки квадратной корень, получишь радіусъ AM; наконецъ по извѣстному радіусу AM и боку AD треугольника ADM, сыскавъ величину перпендикуляра DM, умножь имъ полсумму боковъ, то получится площадь правильнаго пяти-угольника ABFGH.

Рѣшен. II. (*Фиг.* 173). По сысканной діогонали AI и AN найдя IN (§ 176), сдѣлай слѣдующую пропорцію: IN:AI=AI къ діаметру IC (§ 202. *Слѣд.* 1), которой раздѣля пополамъ, получишь радіусъ IG=AG; а потомъ сыщется площадь правильнаго пяти-угольника ABLIM, какъ показано.

Слѣдств. Когда потребуется по данной діогонали AG найти бокъ AB (*фиг.* 124); тогда діогональ AG=AC раздѣли по наружной посредственной пропорціи, то средняя будетъ равна боку AB пяти-угольника (§ 143. *Слѣд.* 2).

§ 229. ЗАДАЧА. *По извѣстному радіусу* AG, *правильнаго пяти-угольника* ABCDE, *сыскать онаго бокъ* AE *и площадь.* Фиг. 174.

Рѣшен. I. Радіусъ AG раздѣли по наружной посредственной пропорціи (§ 140), средняя AH будетъ равна боку AM десяти-угольника (§ 141), вписаннаго съ пяти-угольникомъ въ одномъ кругѣ, которой сыщется слѣдующимъ образомъ: въ прямоугольномъ треугольникѣ AFK, по извѣстнымъ $AF = \frac{1}{2}AG$, $AK = AG$ найдется $KF = HF$ (§ 175), изъ которой вычти AF, останется $AH = AM$; потомъ умножь AM квадратно и радіусъ AG квадратно, площади сихъ квадратовъ сложа вмѣстѣ, извлеки корень квадрата, то получится бокъ AE пяти-угольника ABCDE (§ 226); а потомъ, какъ въ предыдущей задачѣ показано, сыщется площадь.

Рѣшен. II. Сыскавъ бокъ десяти-угольника AM, сдѣлай слѣдующую пропорцію: 2AG или $CM : AM = AM : NM$ (§ 202); потомъ по извѣстной NM и AM сыщи AN (§ 176), которую удвоя, получится бокъ AE даннаго пяти-угольника; а наконецъ сыщется площадь онаго, какъ предъ симъ показано было.

§ 230. ЗАДАЧА. *Въ правильномъ пяти-угольникѣ* ABCDE, *величина діогонали* AC *съ бокомъ* AE *вообще извѣстна, найти оныя порознь.* Фиг. 174.

Рѣшен. Проведя линѣю AH=AC+AE (*фиг.* 175), раздѣли оную по наружной посредственной пропорціи (§ 140); то средняя HD=GH будетъ равна діогонали AC (§ 144.) (*фиг.* 174), которой величина по § 228 сыщется; а потомъ, когда изъ суммы AC+AE вычтется AC, то останется бокъ AE пятиугольника ABCDE.

§ 231. ЗАДАЧА. *По данной высотѣ* CF, *найти бокъ* AE *правильнаго пяти-угольника* ABCDE. Фиг. 176.

Рѣшен. Данную высоту CF раздѣля по наружной посредственной пропорціи (§ 140), изъ точки F радіусомъ FI опиши дугу IG; а изъ точки C высотою CF опиши другую дугу FG; въ точку G, гдѣ дуги пересѣкутся, проведи линѣи GC и GF, то въ треугольникѣ GFC будетъ уголъ GCF=36°, а уголъ GFC=FGC=72° (§ 141. *Слѣд.*); а потому будетъ треугольнику ACE подобенъ (§ 143. *Слѣд.* 1). И такъ сыскавъ по § 228 среднюю пропорціональную FI=FG, раздѣли оную на двѣ равныя части, получишь PG=PF; потомъ по извѣстной PF и FC, найдется высота CP; и наконецъ для подобія треугольниковъ GFC и ACE составя слѣдующую пропорцію CP:CF=GF:AE (§ 117. *Слѣд.* 3), найдется бокъ AE (*Ариѳм.* § 132).

§ 232. ЗАДАЧА. *По данному боку* AB, *найти площадь правильнаго десяти-угольника* ABIKL. Фиг. 124.

Рѣшен. Раздѣля данной бокъ AB по наружной посредственной пропорціо (§ 140), будетъ AB+BC=AC равно радіусу AG правильнаго

десяти-угольника (§ 143), коего величина по § 228 сыщется; потомъ по извѣстному радіусу AG и основанію $AD = \frac{1}{2}AB$, найдется перпендикуляръ GD, опущенный изъ центра G на бокъ AB; а наконецъ величиною сего перпендикуляра GD, умноживъ полсуммы боковъ, получится площадь правильнаго десяти-угольника ABIKL.

§ 233. ЗАДАЧА. *По радіусу* DE, *найти площадь правильнаго десяти-угольника* DHC. (Фиг. 177.

Рѣшен. Раздѣля радіусъ DE по наружной посредственной пропорціи, средняя Dr будетъ равна боку CD правильнаго десяти-угольника, величина котораго по § 228 найдется; а потомъ по извѣстному радіусу ED и $BD = \frac{1}{2}CD$, сыскавъ перпендикуляръ BE (§ 175), опущенной изъ центра E на бокъ CD, умножь величиною онаго полсуммы боковъ, то получится площадь правильнаго десяти-угольника DHC.

§ 234. ТЕОРЕМА. *Плоскость круга* CSBD, *равна произведенію изъ радіуса* AC *и половины окружности* CSBD. (Фиг. 178.

Доказ. Поелику кругъ ничто иное, какъ правильной многоугольникъ, имѣющій безконечное число боковъ, то окружность онаго можетъ быть принята за сумму боковъ сего многоугольника, а радіусъ AC за перпендикуляръ, опущенной изъ центра A на безконечно малой его бокъ *ie*, ни чѣмъ не разнящійся отъ прямой линѣи; но поелику мы уже въ § 220 доказали, что плоскость всякаго правильнаго многоугольника равна произведенію изъ половины суммы боковъ на перпендикуляръ, опущенной изъ центра на одинъ изъ

I 4

боковъ правильнаго многоугольника; слѣдовательно и плоскость круга равна произведенію изъ половины окружности и радіуса AC, которой есть перпендикуляръ, опущенной изъ центра A на безконечно малую часть *ie* окружности круга.

Слѣдст. I. Изъ сего удобно разумѣть можно, что кругъ равенъ такому треугольнику ACF, коего основаніе CF равно окружности круга, а высота есть радіусъ AC; и равенъ также такому прямоугольнику ACGH, коего основаніе CG равно половинѣ окружности круга, а высота есть радіусъ AC; ибо, ежели положимъ, что окружность круга равно $O = CF$, и $\frac{1}{2}O = \frac{1}{2}CF = CG$, то будетъ плоскость круга $CSBD = \frac{1}{2}O \times AC = \frac{1}{2}CF \times AC = CG \times AC$ (*Ариѳм.* § 36); но $\frac{1}{2}CF \times AC$ равно плоскости треугольника ACF (§ 162. *Слѣд.* 1), а $CG \times AC$ равно плоскости прямоугольника ACGH (§ 160); слѣдовательно кругъ CSBD равенъ треугольнику ACF и равенъ прямоугольнику ACGH, у котораго основаніе CG равно половинѣ окружности O, а высота радіусу AC.

Слѣдст. II. Изъ того же явствуетъ, что плоскость круга равна такому прямоугольнику BCKN, котораго основаніе CK равно четверти окружности круга, а высота есть діаметръ BC; ибо ежели $CK = KG = AL = \frac{1}{4}$ окружности, и $KL = LN$ равно радіусу AB, то будетъ прямоугольникъ KGHL равенъ прямоугольнику ABNL (§ 158); а придавъ къ каждому изъ нихъ общій прямоугольникъ ACKL, будетъ прямоугольникъ $BCKN = ACGH$ равенъ

кругу CSBD. Слѣдовательно плоскость круга равна также произведенію изъ четверти окружности на діаметръ $BC = \frac{1}{4} O \times BC$.

Слѣдств. III. Плоскость вырѣзка ACD, равна произведенію изъ половины дуги C*n*D на радіусъ AC; ибо представить себѣ можно, что вырѣзокъ ACD состоитъ изъ безконечнаго множества треугольниковъ CA*e*, *e*A*b* и проч., коихъ верхи находятся въ центрѣ A, а основанія ихъ суть безконечно малыя части C*e*, *eb* и проч. дуги C*n*D, и высота каждаго изъ сихъ треугольниковъ равна радіусу AC круга; но поелику плоскость каждаго изъ сихъ треугольниковъ, равна произведенію изъ половины основанія C*e* и радіуса AC, то плоскость всѣхъ треугольниковъ, составляющихъ плоскость вырѣзка ACD, будетъ равна произведенію изъ половины суммы ихъ основаній, то есть изъ половины дуги C*n*D и радіуса AC, которой есть обшая ихъ высота. Изъ сего легко разумѣть можно, что плоскость вырѣзка ACD круга, равна такому треугольнику ACE, коего основаніе CE равно дугѣ C*n*D, а высота есть радіусъ AC; ибо когда дуга CD равна CE, то будетъ плоскость вырѣзка равна $\frac{1}{2} CD \times AC = \frac{1}{2} CE \times AC$ (*Ариѳм.* § 36), равна плоскости треугольника ACE (§ 160. *Слѣд.* 2).

Прибавл. Дабы найти плоскость круга, или такъ называемую *Квадратуру круга* (*), то надлежитъ сперва найти прямую линѣю совершенно равную окружности круга; но по-

(*) Подъ словомъ *Квадратуры круга*, разумѣется квадратъ совершенно равный плоскости круга.

елику мы не имѣемъ еще способа Геометрическаго находить прямую линѣю совершенно равную окружности круга, и еще извѣстно намъ, какъ содержаніе діаметра къ своей окружности, такъ и содержаніе квадрата изъ діаметра къ площади своего круга (*), то принуждены бываемъ употреблять такія содержанія, которыя отъ истиннаго почти никакой чувствительной погрѣшности не имѣютъ, какъ-то: 1) древній Математикъ *Архимедъ*, посредствомъ діаметра круга, находя бока вписанныхъ въ кругѣ и описанныхъ около онаго правильныхъ многоугольниковъ, своими окружностями приближающихся къ равенству окружности круга, нашелъ, что ежели діаметръ круга раздѣлится на 7 равныхъ частей, то такихъ частей въ окружности круга будетъ 22, или все то же, что ежели діаметръ круга будетъ содержать въ себѣ 7 дюймовъ или футовъ, то въ окружности онаго будетъ 22 дюйма, или фута. Потомъ послѣдовавшіе по немъ многіе уже Математики нашли, что діаметръ круга содержится къ своей окружности какъ 100 къ 314; наконецъ *Адріанъ Мецій* нашелъ содержаніе діаметра къ

(*) Хотя многіе славнѣйшіе Математики предпринимали трудиться къ изслѣдованію совершенства круга; но однакожъ со всѣми ихъ острѣйшими умозрѣніями и сильнѣйшими доводами, тщетно проливали потъ свой, и тратили время на такое изслѣдованіе, которое, утвердительно сказать можно, никогда совершенно изобрѣтено быть не можетъ.

окружности какъ 113 : 355 ; и сіе послѣднее содержаніе есть самое вѣрнѣйшее.

Справедливость всѣхъ сихъ содержаній доказана будетъ въ *Тригонометріи* на своемъ мѣстѣ.

§ 235. ЗАДАЧА. *По извѣстному діаметру* AB=80′ *круга* BGDM, *найти онаго окружность и площадь.* Фиг. 179.

Рѣшен. Поелику діаметры круговъ содержатся какъ ихъ окружности (§ 152. *Слѣд.* 1), то по *Архимедову* содержанію выйдетъ слѣдующая пропорція: какъ діаметръ 7 содержится къ своей окружности 22, такъ діаметръ AB=80′ будетъ содержаться къ окружности своего круга, которая будетъ четвертое пропорціональное число (*Ариѳм.* § 132), то есть $7 : 22 = 80' : \frac{80 \times 22}{7} = 251'.42857$ равно окружности круга. Или по *Меціеву* содержанію какъ $113 : 355 = 80' : \frac{80 \times 355}{113} = 251.32743$ равно окружности круга BGD; потомъ умноживъ половину найденной окружности радіусомъ CB, или окружность половиною радіуса CB, получится требуемая площадь круга (§ 234). И такъ по *Архимедову* содержанію выдетъ площадь $251'42857 \times 20 = 5028'.57140$; и по *Меціеву* содержанію равна 5026′.54860.

Примѣч. Изъ сего видно, что разность между найденными окружностями круга BGDM=0.10114; а разность между найденными плоскостьми круговъ равна 2.02280. Слѣдовательно содержаніе *Архимедово* можно употребить въ такихъ только случаяхъ, гдѣ не требуется самой точности, но естьли окружность и площадь круга найти должно съ надлежащею вѣрностію, то должно принимать содержаніе *Меціево*.

§ 236. ЗАДАЧА. *Въ кругѣ* ADBG, *діаметръ* AB *съ окружностію* BGD *вообще извѣстны, найти оные порознь.* (Фиг. 179.

Рѣшен. Сдѣлавъ слѣдующую пропорцію: какъ 29 къ 7, такъ сумма діаметра съ окружностію будетъ содержаться къ діаметру AB, найденную величину діаметра AB вычти изъ общей суммы, остатокъ будетъ равенъ окружности BGD. Ибо когда 7 : 22=AB : BGD (§ 234. *Приб.*), то будетъ 7+22 или 29 : 7=AB+BGD : AB (*Ариѳм.* § 117). И такъ положимъ дано діаметру съ окружностію вмѣстѣ 145', то будетъ 29 : 7=145' : 35'=AB, и 145−35=110' равно окружности BGD.

§ 237. ЗАДАЧА. *По извѣстной дугѣ* DMB *и градусамъ угла* DCB, *найти площадь вырѣзка круга* DCBM. (Фиг. 179.

Рѣшен. Сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ число градусовъ *n* : 360°, такъ дуга DMB будетъ содержаться къ окружности ADBG (§ 14. *Слѣд.* 1); потомъ составя пропорцію, какъ 22 : 7, такъ найденная окружность ADBG будетъ содержаться къ діаметру AB (§ 234. *Приб.*); наконецъ раздѣля величину найденнаго діаметра AB пополамъ, получится радіусъ BC, коимъ умноживъ половину дуги BMD, получится требуемая площадь вырѣзка DCBM (§ 234. *Слѣд.* 3). И такъ, ежели положимъ, что дуга DMB=130', а уголъ DCB=52°, то будетъ 52° : 360°=130' : 900' равно окружности ADBG; потомъ 22 : 7=900' : 286'.36=діаметру AB, и $\frac{286.36}{2}$=143'.18=радіусу BC, $\frac{130}{2}$=65'= половинѣ дуги DB; наконецъ 143'.18×65=906'.7 =$\frac{1}{2}$BD×BC=площади вырѣзка DCBM.

§ 238. ТЕОРЕМА. *Плоскость круга* CSBD *содержится къ квадрату діаметра* BC, *какъ четверть окружности къ діаметру* BC; *или по содержанію* Архимедову *какъ* 11:14; *а по* Мецієву *какъ* 355 *къ* 452. Фиг. 178.

Доказ. Поелику площадь круга CSBD равна прямоугольнику BCKN, у коего основаніе CK равно четверти окружности, а высота есть діаметръ BC (§ 234. *Слѣд.* 2); и притомъ прямоугольникъ BCKN съ квадратомъ BCQP изъ діаметра BC, имѣютъ одну высоту BC; то будетъ BCKN : BCQP = KC : CQ (§ 172); но KC = четверти окружности, а CQ = діаметру BC; слѣдовательно прямоугольникъ BCKN, то есть плоскость круга, содержится къ площади квадрата BCQP изъ діаметра AB, какъ четверть окружности къ діаметру BC. И такъ естьли означимъ площадь круга CSBD буквою X, а окружность онаго буквою O, то будетъ $X : \overline{BC}^2 = \frac{1}{4}O : BC$; но какъ по найденному содержанію *Архимеда* O : BC = 22 : 7 = 44 : 14 (по умноженіи на 2); а по содержанію *Меція* O : BC = 355 : 113 = 1420 : 452 (по умноженіи на 4); а когда въ каждой изъ сихъ пропорцій предыдущіе члены раздѣлятся на 4, то будетъ: 1е) $\frac{1}{4}O : BC = \frac{44}{4} : 14 = 11 : 14$. 2е) $\frac{1}{4}O : BC = \frac{1420}{4} : 452 = 355 : 452$; а какъ члены перваго содержанія каждой изъ сихъ пропорцій равны членамъ втораго содержанія первой пропорціи, то для равенства содержаній будетъ по *Архимедову* содержанію $X : \overline{BC}^2 = 11 : 14$, а по *Мецієву* $X : \overline{BC}^2 = 355 : 452$. Также докажется по содержанію прочихъ Математиковъ, что $X : \overline{BC}^2 = 157 : 200$.

Прибавл. I. Слѣдуя сему правилу, легко доказать можно, что площадь круга X, содержится къ квадрату ACRS радіуса AC, по *Архимедову* содержанію, какъ 22 : 7; а по *Мецієву*, какъ 355 : 113; ибо площадь круга X, равна прямоугольнику ACGH, коего основаніе CG равно половинѣ окружности O, а высота есть радіусъ AC, и притомъ прямоугольникъ ACGH съ квадратомъ ACRS радіуса AC, имѣютъ одну высоту AC, то будетъ прямоугольникъ $ACGH : ACRS = CG : CR$ или AC, то есть площадь круга $X : \overline{AC}^2 = \frac{1}{2}O : AC$; но по содержанію *Архимедову* $O : BC = 44 : 14$, а по *Мецієву* $O : BC = 355 : 113 = 710 : 226$ (по умноженіи на 2); а когда члены каждой изъ сихъ пропорцій раздѣлятся на 2, то будетъ : 1е) $\frac{1}{2}O : AC = 22 : 7$. 2е) $\frac{1}{2}O : AC = 355 : 113$; слѣдовательно для равенства втораго содержанія первой пропорціи, будетъ по *Архимедову* содержанію $X : \overline{AC}^2 = 22 : 7$; а по *Мецієву* $X : \overline{AC}^2 = 355 : 113$.

Прибавл. II. Основываясь на сихъ двухъ предложеніяхъ, несравненно удобнѣе противу прежняго, по извѣстному діаметру BC сыщется площадь круга, сдѣлавъ слѣдующую пропорцію: $14 : 11 = \overline{BC}^2 : X$, при чемъ будетъ $\frac{11}{14}\overline{BC}^2$ = площади круга X; или какъ $7 : 22 = \overline{AC}^2 : X$, при чемъ будетъ $\frac{22}{7}\overline{AC}^2 = X$ = площади круга; то есть въ первомъ случаѣ, когда діаметръ BC умножится квадратно и чрезъ $\frac{11}{14}$, а во второмъ когда радіусъ AC умножится квадратно и чрезъ $\frac{22}{7}$, то въ обоихъ случаяхъ получится площадь круга X.

§ 239. ЗАДАЧА. *По извѣстной площади круга* ADBG=8000°, *найти діаметръ* AB. Фиг. 179.

Рѣшен. Составя пропорцію по *Архимедову* содержанію, какъ 11:14=8000°: $\overline{AB}^2$, найдется $\overline{AB}^2$; потомъ изъ найденной площади квадрата діаметра AB извлеки квадратной корень, то получится діаметръ AB. Или по *Мецієву* содержанію, какъ 355:452=8000°:$\overline{AB}^2$, и будетъ $\sqrt{\overline{AB}^2}$ =діаметру AB. И такъ будетъ въ первомъ случаѣ $\overline{AB}^2$=10181, $\sqrt{10181}$=100.90=AB; а во второмъ $\overline{AB}^2$=10185, и $\sqrt{10185}$=100.99=AB.

§ 240. ТЕОРЕМА. *Площадь вырѣзка* DCBM *круга, содержится къ площади круга* DGBM, *какъ градусы n угла* DCB *къ* 360°. Фиг. 179.

Доказ. Поелику дуга DMB содержится къ окружности круга DGBM, какъ градусы *n* къ 360° (§ 14. *Слѣд.* 1); а умножа первые члены сей пропорціи чрезъ $\frac{1}{2}$BC, будетъ $\frac{1}{2}$BC×DMB: $\frac{1}{2}$BC×DGBM=*n*: 360° (*Ариѳм.* § 122); но $\frac{1}{2}$BC× DMB=площади вырѣзка DCBM, а $\frac{1}{2}$BC×DGBM =площади круга DGBM (§ 234); слѣдовательно площадь вырѣзка DCBM къ площади круга DGBM, какъ градусы *n* угла DCB къ 360 град.

§ 241. ЗАДАЧА. *По извѣстной площади вырѣзка* DCBM *и градусамъ n угла* DCB, *сыскать дугу* DMB *и радіусъ* DC. Фиг. 179.

Рѣшен. Сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ градусы *n*:360°, такъ площадь вырѣзка DCBM содержится къ площади круга ADBG; потомъ по извѣстной площади круга ADBG, сыщи діаметръ AB (§ 239), также и радіусъ CD; наконецъ площадь вырѣзка DCBM раздѣля на половину радіуса DC, получишь дугу DMB.

§ 242. ЗАДАЧА. *По данной хордѣ* DB, *и перпендикуляру* ME, *которой падаетъ на половину хорды* DB, *сыскать площадь отрѣзка круга* DBMD. Фиг. 179.

Рѣшен. Сыскавъ центръ C дуги DMB, дополни кругъ (§ 65), продолжи ME до G, то будетъ ME : EB = EB : EG (§ 202), по сему ME + EG = діаметру MG, которой раздѣля пополамъ, получишь радіусъ CM = CB = CD. Смѣряй транспортиромъ уголъ DCB вырѣзка; положимъ, что будетъ оному 70 град. Потомъ по извѣстному діаметру GM сыскавъ окружность круга (§ 235), сдѣлай сію пропорцію: какъ 360 : 70, такъ сысканное количество окружности ADMBG къ дугѣ DMB (§ 14); умножь найденное количество дуги половиною радіуса CB, то произведеніе будетъ означать площадь вырѣзка (§ 234); потомъ изъ CM вычти ME, остатокъ будетъ равенъ перпендикуляру CE; наконецъ по извѣстной высотѣ CE и основанію DB, сыскавъ площадь треугольника DBC (§ 165), вычти оную изъ площади вырѣзка DMBC, получишь площадь отрѣзка DBMD.

О взаимныхъ содержаніяхъ плоскостей подобныхъ многоугольниковъ и круговъ.

§ 243. ТЕОРЕМА. *Плоскости подобныхъ многоугольниковъ* NST *и* FLI, *содержатся между собою, какъ квадраты сходственныхъ боковъ* MN *и* EF, *или сходственныхъ частей* OS *и* LQ. Фиг. 126.

Доказ. Поелику треугольники многоугольника NST, подобны сходственнымъ треуголь-

никамъ многоугольника FLI (§ 146), и для того будетъ треугольникъ OMN:EQF$=\overline{MN}^2:\overline{EF}^2=\overline{OM}^2:\overline{OQ}^2$ (§ 173); а для подобія треугольниковъ MOS и EQL будетъ $\overline{OM}^2:\overline{EQ}^2$=MOS:EQL$=\overline{OS}^2:\overline{LQ}^2$; для треугольниковъ OSR и QLK будетъ $\overline{OS}^2:\overline{LQ}^2$= OSR:LQK$=\overline{OR}^2:\overline{QK}^2$; и наконецъ для подобія треугольниковъ ORT и KQI будетъ ORT:KQI= $\overline{OR}^2:\overline{QK}^2$, но поелику послѣдніе члены трехъ первыхъ пропорцій равны первымъ членамъ послѣднихъ, то для равенства содержаній будетъ треугольникъ OMN:△EQF=MOS:EQL =OSR:LQK=ORT:QKI$=\overline{MN}^2:\overline{EF}^2=\overline{OS}^2:\overline{LQ}^2$; а изъ сихъ равныхъ содержаній произойдетъ слѣдующая пропорція: △OMN+MOS+OSR+ORT: EQF+EQL+LQK+QKI$=\overline{MN}^2:\overline{EF}^2=\overline{OS}^2:\overline{LQ}^2$ (*Ариѳ.* § 131), то есть площадь многоугольника NST, содержится къ площади многоугольника FLI $=\overline{MN}^2:\overline{EF}^2$ или какъ $\overline{OS}^2:\overline{LQ}^2$.

Прибавл. Площади правильныхъ многоугольниковъ BCK и DEL одного числа боковъ (*фиг.* 129), содержатся между собою какъ квадраты изъ ихъ боковъ BC и DE, или какъ квадраты изъ радіусовъ BG и DF; ибо для подобія треугольниковъ, будетъ треугольникъ BGC:△DFE= $\overline{BC}^2:\overline{DE}^2=\overline{BG}^2:\overline{DF}^2$ (§ 173); а по умноженіи членовъ перваго содержанія чрезъ число треугольниковъ, составляющихъ правильные многоугольники, будетъ 5BGC:5DFE$=\overline{BC}^2:\overline{DE}^2=\overline{BG}^2:\overline{DF}^2$ (*Ариѳм.* § 122), то есть правильной пятиугольникъ BCK:DEL$=\overline{BC}^2:\overline{DE}^2=\overline{BG}^2:\overline{DF}^2$.

§ 244. ТЕОРЕМА. *Площади круговъ содержатся между собою, какъ квадраты радіусовъ или діаметровъ.* (Фиг. 128.

Доказ. Поелику площадь круга CEF : $\overline{CE}^2$ = 11 : 14, также и площадь круга BMF : $\overline{MB}^2$ = 11 : 14 (§ 238); а для равенства содержаній будетъ CEF : $\overline{CE}^2$ = BMF : $\overline{MB}^2$; по сему CEF : BMF = $\overline{CE}^2 : \overline{MB}^2$ (*Ариѳм.* § 117) = $\frac{1}{4}\overline{CE}^2 : \frac{1}{4}\overline{MB}^2$ (по раздѣленіи на 4); но $\frac{1}{4}\overline{CE}^2 = \overline{AC}^2$, и $\frac{1}{4}\overline{MB}^2 = \overline{BE}^2$; слѣдовательно CEF : BMF = $\overline{CE}^2 : \overline{MB}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{BE}^2$, то есть площадь круга CEF къ площади круга BMF = $\overline{CE}^2 : \overline{MB}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{BE}^2$.

§ 245. ТЕОРЕМА. *Ежели три линѣи* EH, EG *и* EF *составляютъ непрерывную Геометрическую пропорцію, то квадратъ первой линѣи* EH, *содержится къ квадрату второй линѣи* EG, *какъ первая* EH *къ третей* EF. (Фиг. 160.

Доказ. Поелику EH : EG = EG : EF (§ 195), то будетъ $\overline{EH}^2 : \overline{EG}^2$ = EH : EF; ибо квадратъ хорды EG, равенъ прямоугольному EFCD, то есть $\overline{EG}^2$ = EH×EF = ED×EF (§ 202. *Слѣд.* 1); но какъ $\overline{EH}^2$ = EHBD съ прямоугольникомъ DEFC имѣютъ общую высоту ED, то будетъ EHBD : EFCD = EH : EF (§ 172), т. е. $\overline{EH}^2 : \overline{EG}^2$ = EH : EF.

Прибавл. Изъ сего явствуетъ, что ежели діаметръ EF раздѣлится на нѣсколько равныхъ частей, и изъ одной части EH поставя перпендикуляръ HG, проведется хорда EG; то квадратъ сей хорды будетъ во столько разъ больше квадрата части EH, во сколько разъ діаметръ EF больше части EH.

§ 246. ТЕОРЕМА. *Плоскость одного многоугольника* A, *содержится къ плоскости друга-*

го подобнаго B, *какЪ бокЪ ab перваго, кЪ третей пропорціональной, найденной кЪ боку ab перваго многоугольника* A, *и сходственному боку ac втораго* B. (Фиг. 211.

Доказ. КЪ боку ab многоугольника A и сходственному боку ac многоугольника B сыскавЪ третью пропорціональную ce (§ 123), будетЪ $ab:db=ac:ce$ (§ 117. *Слѣд.* 1); но какЪ $bd=ac$, то будетЪ $ab:ac=ac:ce$; а изЪ сей непрерывной пропорціи выйдетЪ слѣдующая: $\overline{ab}^2:\overline{ac}^2=ab:ce$ (§ 245); но поелику $A:B=\overline{ab}^2:\overline{ac}^2$ (§ 243), то для равенства содержаній будетЪ $A:B=ab:ce$, то есть плоскость многоугольника A содержится кЪ плоскости другаго подобнаго многоугольника B, какЪ бокЪ ab кЪ третьей пропорціональной линѣи ce, сысканной кЪ боку ab перваго и сходственному боку ac втораго многоугольника.

То же должно разумѣть о плоскостяхЪ подобныхЪ треугольниковЪ и круговЪ.

§ 247. ТЕОРЕМА. *Когда на бокахЪ прямоугольнаго треугольника* ABC, *начертятся какіе нибудь подобные многоугольники* P, Q *и* R, *то плоскость многоугольника* R, *сдѣланнаго на діогонали* AB, *будетЪ равна суммѣ плоскостей* P+Q *начерченныхЪ на прочихЪ бокахЪ.* (Фиг. 180.

Доказ. Поелику $P:\overline{AC}^2=Q:\overline{BC}^2=R:\overline{AB}^2$ (§ 243), то будетЪ $P+Q:\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=R:\overline{AB}^2$ (*Ариѳм.* § 131); но $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$ (§ 174), слѣдовательно и $P+Q=R$ (*Ариѳм.* § 125).

Примѣч. ТакимЪ же образомЪ докажется, что сумма двухЪ круговЪ или полукруговЪ сдѣланныхЪ на линѣяхЪ AC и BC, составляющихЪ прямой уголЪ, равны кругу или полукругу сдѣланному на діогонали AB.

§ 948. *Определ.* Когда на діогонали AB прямоугольнаго равнобедреннаго треугольника ABC, опишется полукружіе ANB и четверть окружности AGB, то пространство AGBN, заключающееся между сими дугами, называется *Луночка* (Фиг. 181).

§ 949. ТЕОРЕМА. *Луночка* ANBGA, *равна прямоугольному равнобедренному треугольнику* ABC. (Фиг. 181.

Доказ. Изъ верха C прямаго угла ACB, опусти на AB перпендикуляръ CD, то будетъ AD=DC=DB; потому что уголъ ADC=BDC прямые, уголъ DAC=DBC=45° (§ 48. *Слѣд.* 5), по сему уголъ ACD=BCD=45° (§ 43. *Слѣд.* 3), и уголъ DAC=ACD=45°; слѣдовательно AD=DC (§ 51); и такъ для прямоугольнаго равнобедреннаго треугольника ADC будетъ $\overline{AD}^2+\overline{DC}^2$ $2\overline{AD}^2=\overline{AC}^2$, по сему $\frac{1}{2}\overline{AC}^2=\overline{AD}^2$; но площади круговъ содержатся какъ квадраты ихъ радіусовъ (§ 244), по сей причинѣ площадь круга описаннаго радіусомъ AD будетъ равна половинѣ круга описаннаго радіусомъ CA; и слѣдовательно полкруга ABN равно четверти круга ACBGA; а отнявъ общій отрѣзокъ AGBDA, останется луночка ANBGA равна △ABC.

§ 950. ТЕОРЕМА. *Площади луночекъ* D *и* Q, *равны прямоугольному треугольнику* ABC. (Фиг. 182.

Доказ. Поелику полкруга ACBA, равно суммѣ полукруговъ AC*e*+BC*n* (§ 247); а отнявъ отъ равныхъ количествъ общіе отрѣзки R+P, останется треугольникъ ABC равный суммѣ луночекъ D+Q.

О плоскостяхъ кронъ и элипсисовъ.

§ 251. *Опредѣл. Одноцентрные круги* суть тѣ, кои описываются изъ одного центра (*фиг.* 183). *Разноцентрные* круги суть тѣ, кои начертываются изъ разныхъ центровъ. *Фиг.* 184.

§ 252. *Опредѣл. Крона* или *Вѣнецъ* есть пространство A или B, между окружностями двухъ одноцентрныхъ или разноцентрныхъ круговъ заключающееся. *Фиг.* 183 и 184.

§ 253. ТЕОРЕМА. *Площадь кроны* W *одноцентрныхъ круговъ, равна произведенію изъ полсуммы окружностей двухъ круговъ и разности* DE *радіусовъ* CE—CD. (Фиг. 185.

Доказ. Когда кругъ $AnEh=\triangle CEF$, коего основаніе EF равно окружности $EnAh$, а высота радіусъ CE (§ 234. *Слѣд.* 1), то линѣя DG, проведенная изъ точки D параллельно къ EF, также будетъ равна окружности $DeBd$; ибо окружность $EnAh:DeBd=CE:CD$ (§ 152. *Слѣд.* 1); также для подобія треугольниковъ CEF и CDG, будетъ $CE:CD=EF:DG$, а для равенства содержаній будетъ $EnAh:DeBd =EF:DG$; но $EnAh=EF$ по положенію, по сему и $DeBd=DG$ (*Аривм.* § 125); слѣдовательно и кругъ $DeBd=\triangle CDG$ (§ 234. *Слѣд.* 1); по сей причинѣ площадь круга $AnEh$ безъ площади кругс $DeBd$, равна площади $\triangle CEF$ безъ $\triangle CDG$ (*Аривм.* § 32), то есть площадь кроны W равна трапеціи EDGF, у которой основаніе EF равно окружности $EnAh$, параллельная DG равна окружности $DeBd$, а высота DE равна разности DE радіусовъ CE—CD. Но плос-

кость трапеціи EDGF равна произведенію изъ полсуммы параллельныхъ линѣй EF+DG и высоты DE (§ 168); слѣдовательно и площадь кроны W, равна произведенію изъ полсуммы окружностей двухъ круговъ на разность DE радіусовъ CE и CD.

§ 954. ТЕОРЕМА. *Площадь кроны Q, равна площади круга, котораго діаметръ есть хорда EF.*

Доказ. I. Когда плоскость кроны Q заключается между двухъ одноцентрныхъ круговъ; то площадь оной равна кругу, коего діаметръ есть хорда EF (*фиг.* 186), касающаяся окружности меньшаго круга; ибо въ разсужденіи прямоугольнаго треугольника BDE, будетъ $\overline{DE}^2 - \overline{BD}^2 = \overline{BE}^2$ (§ 174. *Приб.* 9); но поелику площади круговъ содержатся какъ квадраты радіусовъ (§ 944), то будетъ площадь круга радіуса DE безъ площади круга радіуса DB, то есть площадь кроны Q, равна площади круга радіуса BE или діаметра EF.

Доказ. II. Когда плоскость кроны Q (*фиг.* 187), заключается между двухъ окружностей, касающихся въ точкѣ C, то площадь оной равна кругу, котораго діаметръ есть хорда EF, проходящая перпендикулярно чрезъ половину части AB діаметра AC. Ибо когда сдѣлавъ GD =BC, и раздѣля оную пополамъ въ точкѣ H, радіусомъ HG опишется кругъ, то окружность онаго будетъ параллельна окружности AFCE, и точка H будетъ общій центръ обоихъ круговъ; потому что BC=GD по положенію, и BD общая, по сему DC=BG=AG; но HD=HC радіусы, то будетъ и AH=HC;

слѣдовательно точка H есть общій центръ. И такъ по первому случаю будетъ площадь круга AFCE безъ площади круга діаметра GD или BC, равна площади кроны, заключающей-ся между параллельныхъ окружностей, и равна площади кроны Q заключающейся между двухъ окружностей касающихся между собою въ точкѣ C.

Доказ. III. Ежели плоскость кроны Q (*фиг.* 188), заключается между двухъ разноцентрныхъ круговъ, то оная будетъ равна кругу, коего діаметръ есть хорда EF, пересѣкающая діаметръ AC перпендикулярно въ точкѣ G, такъ что $AG = \frac{1}{2}(AB + DC)$. Ибо сдѣлавъ $BI = DC$, и раздѣля AI на двѣ равныя части въ точкѣ G, проведи хорду EGF перпендикулярно къ діаметру AC, положи $KG = BD$, и раздѣля GK на двѣ равныя части въ точкѣ H, радіусомъ HG опиши кругъ, то окружность онаго будетъ параллельна окружности круга AFCE; потому что $\frac{1}{2}(AB + BI) = \frac{1}{2}(AB + DC)$, и $\frac{1}{2}AI = AG = GB + BI$ по положенію; но $GK = DB$, BK общая; по сему $KD = BG$ (*Ариѳм.* § 32); слѣдовательно $KD + DC = KC = BG + IB = GI = AG$; а придавъ къ линѣямъ AG и KC, радіусы GH и HK, будетъ $AH = HC$; по сему точка H есть общій центръ двухъ круговъ AFCE и $GnKi$; по первому же случаю, плоскость круга AFCE безъ плоскости круга діаметра GK, то есть плоскость кроны одноцентрныхъ круговъ, равна кругу діаметра EF; но какъ діаметръ $GK = BD$, слѣдовательно и плоскость круга AFCE безъ плос-

кости круга діаметра BD, то есть плоскость кроны Q, равна плоскости круга діаметра EF.

§ 255. ЗАДАЧА. *Извѣстна площадь кроны Q одноцентрныхъ круговъ, и часть AB=CG, найти діаметръ BG меньшаго круга.* Фиг. 186.

Рѣшен. Поелику плоскость кроны Q равна плоскости круга діаметра EF (§ 254. *Доказ.* 1); то по извѣстной плоскости сего круга найдется діаметръ EF (§ 239), коего половина будетъ равна радіусу BE; потомъ сдѣлавъ слѣдующую пропорцію: AB:BE=BE:BC. найдется BC, и наконецъ будетъ BC—GC равно діаметру BG.

§ 256. ЗАДАЧА. *Плоскость кроны Q разноцентрныхъ круговъ, взаимно касающихся въ точкѣ C и часть AB діаметра AC извѣстны, найти діаметръ BC меньшаго круга.* Фиг. 187.

Рѣшен. Изъ средины G линѣи AB, поставя перпендикуляръ EGF, будетъ площадь кроны Q равна кругу діаметра EF (§ 254. *Доказ.* 2). И такъ по извѣстности сего круга найдется діаметръ EF (§ 239), которой раздѣля на двѣ равныя части, получится радіусъ EG; потомъ составя слѣдующую пропорцію: AG: GE=GE:GC, сыщется GC, и наконецъ будетъ GC-GB равно діаметру BC.

§ 257. ЗАДАЧА. *Плоскость кроны Q разноцентрныхъ круговъ и части AB и DC діаметра AC извѣстны, найти діаметръ BD меньшаго круга.* Фиг. 188.

Рѣшен. Положивъ BI=DC, раздѣли линѣю AI, равную AB+DC, на двѣ равныя части въ точкѣ G; поставь перпендикуляръ EGF; но поелику плоскость кроны Q равна кругу діаметра EF (§ 254. *Доказ.* 3), то по извѣстной

плоскости сего круга найдется діаметръ EF, которой раздѣля на двѣ равныя части, получится радіусъ GE; потомъ составя слѣдующую пропорцію: $\frac{1}{2}$(AB+DC) или AG : GE = GE : GC, найдется GC, и наконецъ будетъ GC—(GB+BI) = GC—GI равно діаметру BD.

§ 958. ТЕОРЕМА. *Плоскость круга* AFBE *большой оси* AB, *содержится къ площади элипсиса* AGBH, *какъ большая ось* AB *къ меньшой* GH. (Фиг. 130.

Доказ. Поелику AB : GH = $\frac{1}{2}$AB или EX : $\frac{1}{2}$GH или HX = IY : IK = VM : MN = RP : QP = TS : OS (§ 154); то для равенства содержаній, будетъ EX + YI + MV + RP + TS : HX + KI + NM + PQ + SO + AB : GH (*Ариѳм.* § 131); но какъ предыдущій членъ перваго содержанія означаетъ сумму полупоперешниковъ, составляющихъ четверть круга AFBE, а послѣдующій есть сумма полупоперешниковъ, составляющихъ четверть элипсиса AGBH; то по умноженіи членовъ перваго содержанія на 4, будетъ цѣлая плоскость круга AFBE, содержаться къ цѣлой плоскости элипсиса AGBH, какъ большая ось AB къ меньшой GH (*Ариѳм.* § 122).

§ 959. ТЕОРЕМА. *Плоскость элипсиса* ADBC, *равна плоскости круга, коего діаметръ* BF *есть средняя пропорціональная между меньшею* CD = BG *и большею осью* AB. Фиг. 139.

Доказ. Положимъ плоскость элипсиса равна P, плоскость круга большой оси AB = Q, плоскость круга изъ средней BF = W, то будетъ Q : P = AB : CD или къ BG (§ 958); и притомъ $\overline{AB}^2 : \overline{BF}^2$ = AB : BG (§ 945); по сему Q : P = $\overline{AB}^2 : \overline{BF}^2$; но Q : W = $\overline{AB}^2 : \overline{BF}^2$ (§ 944), а для равен-

ства содержаній будетъ Q:P=Q:W; но поелику Q=Q, то будетъ P=W (*Ариѳм.* § 125), то есть плоскость элипсиса ADBC равна плоскости круга діаметра BF.

§ 260. ЗАДАЧА. *Большая* AB *и меньшая ось* CD *извѣстны, сыскать площадь элипсиса* ADBC. Фиг. 189.

Рѣшен. На продолженной AB сдѣлай BG=CD; потомъ раздѣля AG на двѣ равныя части, опиши полкруга AFG. Изъ точки B поставь перпендикуляръ BF, и раздѣля оной пополамъ, опиши кругъ. По извѣстной AB и CD =BG сыщется BF (§ 203); напослѣдокъ по діаметру BF найдется площадь круга BFr (§ 235), которая будетъ равна площади элипсиса ADBC (§ 259). Или сыскавъ площадь круга большой оси AB (§ 234), сдѣлай слѣдующую пропорцію, какъ большая ось AB содержится къ меньшей CD, такъ площадь круга большой оси AB, будетъ содержаться къ площади элипсиса ADBC.

§ 261. ЗАДАЧА. *Площадь элипсиса* ACBD *и меньшая ось* CD *извѣстны, сыскать большую ось* AB. Фиг. 189.

Рѣшен. Поелику площадь элипсиса ACBD, равна площади круга діаметра BF (§ 259); то по извѣстной площади онаго, сыскавши діаметръ BF (§ 239), сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ меньшая ось CD или BG содержится къ діаметру BF, такъ оной же діаметръ BF къ большой оси AB.

§ 262. ЗАДАЧА. *По извѣстной площади элипсиса* ACBD *и содержанію большой оси* AB *къ меньшей* CD, *какъ* 9:5, *сыскать оныя порознь.* Фиг. 189.

Рѣшен. Поелику P:Q=CD:AB=5:9; по сей причинѣ составя пропорцію, какъ 5:9= P:Q, найдется площадь круга Q, большой оси AB (§ 259); потомъ по извѣстной площади круга Q сыщется діаметръ AB (§ 239); напослѣдокъ сдѣлавъ сію пропорцію, 9:5=AB:CD, найдется меньшая ось CD.

О превращеніи плоскостей.

§ 263. *Опредѣл.* *Превращеніе плоскостей* есть способъ, данное изображеніе плоскости начертить въ другомъ желаемомъ видѣ, котораго бы плоскость равна была плоскости даннаго изображенія.

§ 264. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc, превратить въ равнобедренный agb.* Фиг. 194 (*).

Рѣшен. Раздѣля основаніе *ab* въ точкѣ *d* пополамъ (§ 37), поставь перпендикуляръ *dg* (§ 38); изъ точки *c* проведи *cg* параллельно къ *ab* (§ 46); точки *a*, *g* и *b* соедини прямыми линѣями *ag* и *bg*, будетъ треугольникъ *agb* желаемый.

Истина сего рѣшенія видна въ § 158. *Слѣд.* 1.

§ 265. ЗАДАЧА. *Данной параллелограммъ ac превратить въ треугольникъ ade.* Фиг. 195.

Рѣшен. По продолженіи *ab*, сдѣлай *be=cd*, проведи *de*, получишь треугольникъ *ade* желаемый.

(*) Здѣсь надлежало быть 190й фигурѣ; но поелику во избѣжаніе убытковъ, всѣ слѣдующія фигуры печатаны досками перваго изданія, то и всѣ фигуры остались съ прежними буквами и числами.

Доказ Поелику $ab=dc=be$ по положенію, и уголъ $dch=hbe$, $\angle cdh=\angle beh$, то будетъ треугольникъ $dch=\Delta beh$ (§ 27); а придавъ къ каждому общій четвеространникъ *abhd*, будетъ параллелограммъ *ae* равенъ Δade.

§ 266. ЗАДАЧА. *Данной треугольникъ abc превратить въ прямоугольникъ ae, по основанію ac.* Фиг. 196.

Рѣшен. Изъ верха *b*, на основаніе *ac* опусти перпендикуляръ *bd* (§ 39); также изъ *a* и *c* поставь перпендикуляры *ag* и *ce* (§ 50); потомъ раздѣля высоту *bd* въ *f* пополамъ, проведи *gfe* параллельно къ основанію *ac*, будетъ прямоугольникъ *agec* желаемой.

Доказ. Поелику плоскость треугольника $abc=ac\times\frac{1}{2}bd=ac\times fd$ равна прямоугольнику *agec*. § 162. *Слѣд.* и § 160.

§ 267. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc превратить въ параллелограммъ ae по углу cab.* Фиг. 197.

Рѣшен. Раздѣля бокъ *ac* въ точкѣ *d* пополамъ, изъ точекъ *d* и *b* проведи линѣи *de* и *be* параллельно къ *ab* и *ac* (§ 46); будетъ параллелограммъ *ae* желаемой.

Доказ. Поелику $ad=dc$ по рѣшенію и равно *be* (§ 45), по сему $be=dc$, уголъ $feb=\angle fdc$ и уголъ $fbe=\angle fcd$ (§ 43); а потому и треугольникъ $bef=dfc$ (§ 27); а придавъ къ каждому изъ нихъ общій четвеространникъ *adfb*, будетъ треугольникъ *abc* равенъ параллелограмму *adeb*.

§ 268. ЗАДАЧА. *Всякой четвеространникъ abcd превратить въ треугольникъ abe.* Фиг. 198.

Рѣшен. Соединя точки *b* и *d* прямою линѣею *bd*, изъ точки *c* проведи *ce* параллель-

но къ *bd*, пока пересѣчется съ продолженною *ad* въ точкѣ *e*; потомъ точки *b* и *e* соединя прямою линѣею *be*, получится требуемой треугольникъ *abe*.

Доказ. Поелику треугольникъ *bcd*=*bed* (§ 158. *Слѣд.* 2); то придавъ къ нимъ общій треугольникъ *abd*, будетъ треугольникъ *abe* равенъ четверостороннику *abcd* (*Ариѳм.* § 27).

§ 269. ЗАДАЧА. *Данной треугольникъ abc превратить въ другой afe по данной высотѣ cd.* Фиг. 199.

Рѣшен. Изъ точки *d* проведи *df* параллельно къ основанію *ac*, пока пересѣчется съ продолженною *ab* въ точкѣ *f*; проведи *fc*, и къ ней параллельную *be*, точки *e* и *f* соедини прямою линѣею *ef*, получится треугольникъ *afe* =△*abc*.

Доказ. Треугольникъ *bce*=△*bef* (§ 158. *Слѣд.* 2); то придавъ къ каждому треугольникъ *abe*, будетъ △*abe*+*bec*=*abe*+*bef*, т. е. треугольникъ *abc*=△*afe*.

Примѣч. Когда высота *cd* будетъ меньше высоты даннаго треугольника *abc* (*фиг.* 200); то изъ точки *d* проведи *df* параллельно къ основанію *ac*, точку *f* соедини съ *a* линѣею *af*, а изъ *b* проведи линѣю *be* параллельно *af*. Точки *e* и *f* соединя прямою линѣею *ef*, получишь треугольникъ *efc* желаемой. Ибо треугольникъ *afe*=△*afb* (§ 158. *Слѣд.* 2), по сему треугольникъ *afe*+△*afc*=*abf*+*afc* (*Ариѳм.* § 27), то есть треугольникъ *abc*=△*efc*.

§ 270. ЗАДАЧА. *Данной треугольникъ abc превратить въ другой по данной высотѣ cd и углу x.* Фиг. 201.

Рѣшен. Сперва данной треугольникъ *abc* преврати въ другой *ecg* по высотѣ *cd* (§ 269);

потомъ сдѣлай уголъ ecf равный данному x, изъ точки f, гдѣ бокъ ef съ продолженною dg пересѣчется, проведи линѣю fe; будетъ треугольникъ cfe желаемой.

Доказ. Ибо треугольникъ abc равенъ треугольнику ecg по рѣшенію; но треугольникъ $egc=\Delta ecf$ (§ 158. *Слѣд.* 2); слѣдовательно треугольникъ $abc=\Delta ecf$.

§ 271. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc превратить въ другой по данному основанію ad.* (Фиг. 202.

Рѣшен. Изъ точки c проведи линѣю cg параллельно къ db, а изъ точки d линѣю gd, то будетъ треугольникъ agd желаемой.

Доказ. Ибо треугольникъ $bgd=\Delta bdc$ (§ 158. *Слѣд.* 2), а придавъ къ симъ треугольникамъ общій треугольникъ abd, будетъ треугольникъ $agd=\Delta abc$ (*Ариѳм.* § 27).

Прибавл. Когда данное основаніе ad (*фиг.* 203) будетъ больше основанія ac даннаго треугольника abc, то оной превратится въ другой треугольникъ agd такимъ же образомъ, какъ сказано; и тогда будетъ треугольникъ $abc=\Delta agd$. Ибо треугольникъ $cgb=\Delta cgd$ (§ 158. *Слѣд.* 2); а придавъ къ симъ треугольникамъ общій Δaeg, будетъ $\Delta abc=\Delta agd$.

§ 272. ЗАДАЧА. *Прямоугольникъ abcd превратить въ другой по данной высотѣ be.* (Ф. 204.

Рѣшен. Проведи линѣю ech, пока пересѣчется съ продолженною ad въ h; потомъ на продолженной cb сдѣлай $bf=dh$, изъ точекъ f и e проведи fg параллельно къ be и eg параллельно къ bf, будетъ прямоугольникъ bg желаемой.

Доказ. Поелику треугольникЪ *bec* подобенЪ треугольнику *dch*, потому что уголЪ *ebc=cdh* прямые, уголЪ *bce=dhc* и уголЪ *bec=dch* (§ 48. *СлѣдЪ.* 2), и для того будетЪ *be:cd=bc:dh* или кЪ *bf* (§ 117), причемЪ будетЪ *be×bf=bc×cd* (*Ариѳм.* § 115), то есть прямоугольникЪ *ac* =*bg* (§ 162).

§ 273. ЗАДАЧА. *ПараллелограммЪ abcd превратить вЪ другой по данному основанію dh.* Фиг. 205.

Рѣшен. Проведи линѣю *hce*, пока пересѣчется сЪ продолженною *ab* вЪ *e*; изЪ точки *e* на *bc* опусти перпендикулярЪ *ei*; потомЪ изЪ *h*, поставя на линѣи *dh* перпендикулярЪ *hp*= *ei*, проведи *hf* параллельно кЪ продолженной *cd* и линѣю *pg* параллельно кЪ *hd*, то изобразится параллелограммЪ *gh* равенЪ данному *bd*.

Доказ. ТреугольникЪ *cdh* подобенЪ △*cbe*; ибо уголЪ *dhc=bce*, уголЪ *dch=bec* (§ 43. *Слѣд.* 1), и уголЪ *cdh=ebc* (§ 48. *Слѣд.* 3); и для того будетЪ *dh:bc=ck:ei* (§ 117. *Слѣд.* 3), или все равно *gf:ad=ck:hp*; причемЪ будетЪ *gf×hp=ad×ck*; то есть параллелограммЪ *dhfg* равенЪ параллелограмму *abcd* (§ 169).

§ 274. ЗАДАЧА. *ПараллелограммЪ abcd превратить вЪ квадратЪ bh.* Фиг. 206.

Рѣшен. На продолженной *cb* сдѣлай *bf* равно высотѣ *be* параллелограмма *ab*; опиши на *cf* полкруга *egf*, поставь изЪ *b* перпендикулярЪ *bg*, на которомЪ сдѣланной квадратЪ *bghi* будетЪ равенЪ параллелограмму *ab*.

Доказ. Поелику прямоугольникЪ *ec* равенЪ квадрату *bh* (§ 202); но прямоугольникЪ *ce* равенЪ параллелограмму *ab* (§ 158); слѣдова-

тельно и квадратъ bh равенъ параллелограмму $acbd$.

§ 275. ЗАДАЧА. *Квадратъ ad превратить въ прямоугольникъ fh, котораго бы основанiе съ высотою вмѣстѣ, равны были данной линѣи bc.* (Фиг. 207.

Рѣшен. Данную bc раздѣля пополамъ, опиши полкруга bgc, продолжи ed до g, проведи gf параллельно db; потомъ на fc начерти прямоугольникъ fh, коего бы высота fk была равна bf (§ 90), будетъ прямоугольникъ fh желаемой.

Доказ. Прямоугольникъ $fh = \overline{gf}^2$ (§ 202) $= \overline{bd}^2$; но $bf = fk$, слѣдовательно $fk + fc =$ данной bc.

§ 276. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc превратить въ другой ade, чтобы верхъ онаго лежалъ въ данной точкѣ e, (которая внѣ треугольника), а основанiе находилось на основанiи ac.* Фиг. 208.

Рѣшен. Точки a и e соединя прямою линѣею ae, проведи изъ b линѣю bf параллельно къ ac; изъ f линѣю fd параллельно къ ec; наконецъ проведи линѣю ed, будетъ треугольникъ $ade = \Delta abc$.

Доказ. Ибо треугольникъ $dfe = \Delta dfc$ (§ 158. *Слѣд.* 2); а придавъ къ симъ треугольникамъ afd, будетъ треугольникъ $dfe + \Delta afd = \Delta afd + \Delta dfc$, то есть треугольникъ $ade = \Delta afc$; но треугольникъ $afc = \Delta abc$ (§ 158. *Слѣд.* 2); слѣдовательно треугольникъ $abc = \Delta ade$.

§ 277. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc превратить въ другой, чтобы верхъ онаго лежалъ въ точкѣ d (которая внутри треугольника), а основанiе въ прямой линѣи съ ac.* Фиг. 209.

Рѣшен. Проведя въ точку d линѣи ad и dc, продолжи ac въ обѣ стороны, проведи изъ b

линѣю *be* параллельно къ *ad*, и *bf* параллельно къ *dc*; потомъ проведи *de* и *df*, получится треугольникъ *edf* желаемой.

Доказ. Поелику треугольникъ $adb = \Delta ade$, и треугольникъ $cdb = \Delta cdf$ (§ 158. *Слѣд.* 2); а придавъ къ каждому изъ нихъ треугольникъ *adc*, будетъ треугольникъ $adb + \Delta cbd + \Delta adc = \Delta ade + \Delta cdf + \Delta adc$, то есть треугольникъ $abc = \Delta edf$ (*Ариѳм.* § 27).

§ 278. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc превратить въ другой по данному боку cd и углу acd.* Фиг. 210.

Рѣшен. Проведи *bg* параллельно къ *ac*, точки *a* и *g* соедини прямою линѣею *ag*; потомъ треугольникъ *age* преврати въ другой по основанію *cd* (§ 271), будетъ треугольникъ *cde* желаемой.

Доказ. Поелику данной треугольникъ $abc = \Delta agc$ (§ 158. *Слѣд.* 2), а сей равенъ треугольнику *edc*, слѣдовательно $\Delta edc = \Delta abc$.

§ 279. ЗАДАЧА. *Начертить треугольникъ равный данному abc, и чтобы одинъ его бокъ былъ параллеленъ данной линѣи de.* Фиг. 212.

Рѣшен. Проведи *cf* параллельно къ данной *de*; потомъ описавъ на *ab* полкруга, сыщи среднюю пропорціональную линѣю *ah* между *af* и *ab* (§ 125); проведи изъ *h* линѣю *hi* параллельно къ *de*, будетъ треугольникъ *aih* желаемой.

Доказ. Поелику треугольникъ $acf : \Delta acb = af : ab$, одной высоты *cp* (§ 172. *Слѣд.*), а изъ подобныхъ по рѣшенію треугольниковъ $acf : \Delta aih = af : ab$ (§ 246); и такъ для равенства содержаній будетъ треугольникъ $acf : \Delta acb =$

$=\Delta acf:\Delta aih$; но треугольникъ $acf=\Delta acf$, слѣдовательно и $\Delta acb=\Delta aih$ (*Ариѳм.* § 125).

§ 280. ЗАДАЧА. *Начертить треугольникъ равный данному abc, а треугольнику P подобный.* Фиг. 213.

Рѣшен. На основаніи *ac* начерти треугольникъ *acf*, котораго бы углы при основаніи равны были угламъ *x* и *y* треугольника P (§ 49); проведи *bg* параллельно къ *ac*; сыщи среднюю пропорціональную *ce* между *cf* и *eg* (§ 125), сдѣлай $ch=ce$; проведи *hd* параллельно къ *af*, треугольникъ *cdh* будетъ желаемой.

Доказ. Треугольникъ $acf:acg=cf:cg$, одной высоты *ai* (§ 172. *Слѣд.*); а изъ подобныхъ по рѣшенію треугольниковъ $acf:cdh=cf:cg$ (§ 246), по сему $acf:acg=acf:cdh$; но треугольникъ $acf=\Delta acf$, по сей причинѣ и треугольникъ $acg=\Delta cdh$; треугольникъ же *acg* равенъ данному *acb* (§ 158. *Слѣд.* 2), слѣдовательно $\Delta cdh=\Delta abc$ и подобенъ данному P.

§ 281. ЛЕММА. *Данную линѣю ab раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы одна часть была средняя пропорціональная между другою частію и данною линѣею cd.* Фиг. 214.

Рѣшен. Продолживши данную линѣю *ab* до *c* такъ, чтобы *bc* равна была другой данной *cd*, опиши на *ac* полукружіе *acd*, изъ *b* поставь перпендикуляръ *bd*, раздѣли *bc* въ *f* на двѣ равныя части; изъ *f* радіусомъ *fd* опиши дугу *de*, то будетъ *eb* средняя пропорціональная между частію *ae* и данною линѣею *dc* или *cb*.

Доказ. Изъ *f* радіусомъ *fb* описавъ полкруга *bhc*, проведи *eh*, то будетъ треуголь-

никЪ $bdf = \Delta hef$, потому что уголЪ efd общій, линѣя $hf = bf$, и $fe = df$ радіусы; по сему $bd = he$ и уголЪ $dbf = ehf$ прямые (§ 26); но поелику $\overline{bd}^2 = (ae + eb) \times bc = ae \times bc + eb \times bc$ (§ 202), также $\overline{eh}^2 = (eb + bc) \times eb = eb \times eb + bc \times eb$ (§ 206); но какЪ $\overline{eh}^2 = \overline{db}^2$ по рѣшенію; то будетЪ $ae \times bc + eb \times bc = eb \times eb + bc \times eb$; а отнявЪ отЪ каждаго величину $bc \times eb$, останется $ae \times bc = eb \times eb$ (Аривм. (§ 32); откуда произойдетЪ слѣдующая пропорція: $ae : eb = eb : bc$; слѣдовательно eb есть средняя пропорціональная между ae и bc.

§ 282. ЗАДАЧА. *ТреугольникЪ abc не перемѣняя угла bca, превратить вЪ другой mci, чтобы одинЪ его бокЪ mi былЪ вЪ прямой линѣи сЪ данною точкою d.* Фиг. 215.

Рѣшен. Продолжи основаніе bc вЪ обѣ стороны; изЪ d на bc опусти перпендикулярЪ def, сдѣлай $ef = de$, проведи fg параллельно кЪ bc. Данной треугольникЪ abc преврати вЪ другой cgk по высотѣ ef (§ 269); проведи dh параллельно кЪ ac, сдѣлай cl равное основанію ck превращеннаго треугольника cgk. Линѣю ch раздѣли на двѣ части такЪ, чтобы одна часть cm была средняя пропорціональная, между другою частію hm и линѣею cl или ck (§ 281). ИзЪ d чрезЪ точку m, проведи линѣю dmi, пока пересѣчется сЪ продолженнымЪ бокомЪ ca вЪ точкѣ i, то будетЪ треугольникЪ mci равенЪ данному abc.

Доказ. Высота de треугольника mdh равна высотѣ ef треугольника kgc; также $hm : mc = mc : kc$ или кЪ cl по рѣшенію, и треугольникЪ mic подобенЪ треугольнику mdh; ибо уголЪ $mic = mdh$, уголЪ $icm = mhd$ (§ 43), и уголЪ imc

$=hmd$ (§ 21); а для сего треугольникЪ $hdm:mic=hm:kc$ или cl (§ 246); треугольникЪ же $hdm:kgc$ или $abc=hm:kc$ или cl (§ 158. *Слѣд.* 2); по сему треугольникЪ $hdm:\Delta abc=\Delta hdm:\Delta mic$; но треугольникЪ $hdm=hdm$, слѣдовательно треугольникЪ $abc=\Delta mic$. (*Ариѳм.* § 125).

§ 283. ЗАДАЧА. *Всякой четверосторонникЪ* $abcd$ *превратить вЪ прямоугольникЪ* gd. (Фиг. 216.

Рѣшен. Проведи bf параллельно кЪ ac, точки c и f соедини прямою линѣею cf; треугольникЪ dcf преврати вЪ прямоугольникЪ gd (§ 266), которой будетЪ равенЪ четверостороннику $abcd$.

Доказ. Поелику треугольникЪ $afc=\Delta abc$ (§ 158. *Слѣд.* 2); а придавЪ кЪ каждому изЪ нихЪ треугольникЪ acd, будетЪ треугольникЪ $acf+acd=\Delta dcf=\Delta abc+\Delta acd$ равенЪ четверосторонику $abcd$; но треугольникЪ dcf равенЪ прямоугольнику gd (§ 266); слѣдовательно прямоугольникЪ gd равенЪ четверостороннику $abcd$.

§ 984. ЗАДАЧА. *ЧетверосторонникЪ* $abcd$ *превратить вЪ треугольникЪ* efg, *коего бы верхЪ находился вЪ данной точкѣ* e. (Фиг. 217.

Рѣшен. Проведи изЪ b линѣю bf параллельно кЪ ae, а изЪ c линѣю cg параллельно ed; наконецЪ проведи ef и eg, то треугольникЪ feg будетЪ желаемой.

Доказ. Поелику треугольникЪ $aef=\Delta aeb$, треугольникЪ $edg=\Delta edc$, то придавЪ кЪ симЪ равнымЪ треугольникамЪ aed, будетЪ треугольникЪ $aef+edg+aed=\Delta feg=\Delta aeb=edc+aed$ равенЪ четверосторонику $abcd$.

§ 985. ЗАДАЧА. *ЧетверосторонникЪ* $abcd$ *преить вЪ трапецію* $aefd$. Фиг. 218.

Рѣшен. Продолжа бока *ab* и *cd*, пока пересѣкутся въ точкѣ *k*, преврати треугольникъ *kbc* въ другой *kef*, котораго бы бокъ *ef* былъ параллеленъ *ad* (§ 279); то будетъ трапеція *aefd* равна четвеространнику *abcd*.

Доказ Треугольникъ *kbc*=*ekf* по рѣшенію (§ 279), отъ коихъ отнявъ общій четвеространникъ *kepc*, останется треугольникъ *ebp* =△*pcf*; а придавъ къ нимъ многоугольникъ *abpfd*, будетъ треугольникъ *ebp*+*abpfd*=△*pcf* +*abpfd*, то есть трапеція *aefd* равна четвеространнику *abcd*.

§ 286. ЗАДАЧА. *Пяти-угольникъ abcde превратить въ треугольникъ fcg.* (Фиг. 219.

Рѣшен. Проведи изъ *b* линѣю *bf* параллельно къ *ac*, изъ *d* линѣю *dg* параллельно къ *ce*; потомъ проведи *cf* и *cg*, будетъ треугольникъ *fcg* равенъ пяти-угольнику *abcde*.

Доказ Поелику треугольникъ *acf*=△*acb*, и △*ecg*=△*ecd* (§ 158. *Слѣд.* 2); то придавъ къ нимъ треугольникъ *ace*, будетъ *acf*+*ecg*+*ace* =△*fcg*=*abc*+*ced*+*aec* равно пяти-угольнику *abcde*.

§ 287. ЗАДАЧА. *Пяти-угольникъ abcde превратить въ треугольникъ по сторонѣ ab и углу eab.* (Фиг. 220.

Рѣшен. Изъ точки *d* проведи *dg* параллельно къ *ce*, а изъ *c* линѣю *cf* параллельно къ *bg*; потомъ проведи *bf*, будетъ треугольникъ *abf* желаемой.

Доказ. Поелику треугольникъ *gec*=△*ecd* (§ 158. *Слѣд.* 2); то придавъ къ нимъ четвеространникъ *abce*, будетъ четвеространникъ *abcg* равенъ пяти-угольнику *abcde*; также

треугольникъ $gbc = \Delta gbf$ (§ 158. *Слѣд.* 2); а придавъ къ нимъ треугольникъ abg, будетъ четвеp-росторонникъ $abcg$ равенъ треугольнику abf; но $abcg$ = пяти-угольнику $abcae$; слѣдовательно и треугольникъ abf равенъ пяти-угольнику $abcde$.

§ 288. ЗАДАЧА. *Данной пяти-угольникъ abcde превратить въ другой ahide, чтобы одинъ его бокъ hi былъ параллеленъ къ линѣи dg.* (Фиг. 221.

Рѣшен. Продолжа бока ab и dc, пока пересѣкутся въ k, треугольникъ bck преврати въ другой hik, котораго бы бокъ hi былъ параллеленъ линѣи dg (§ 279); то будетъ пяти-угольникъ $ahide$ равенъ данному пяти-угольнику $abcde$.

Доказ. Поелику треугольникъ $bck = \Delta hik$ по рѣшенію (§ 279); то отнявъ отъ каждаго общій четверосторонникъ $khpc$, будетъ треугольникъ $bph = ipc$; а придавъ къ нимъ многоугольникъ $abpide$, будетъ пяти-угольникъ $abcde$ равенъ пяти-угольнику $ahide$.

§ 289. ЗАДАЧА. *Многоугольникъ abcdef превратить въ треугольникъ bcg по сторонѣ bc и углу abc.* (Фиг. 222.

Рѣшен. Продолживши fe, af и ba, проведи ak параллельно къ ce, hk параллельно къ fc и hg параллельно къ ca; наконецъ проведи cg, то будетъ треугольникъ gcb равенъ данному многоугольнику $abcdef$.

Доказ. Треугольникъ $cek = cde$ (§ 158. *Слѣд.* 2); а придавъ къ каждому изъ нихъ пяти-угольникъ $bcefa$, будетъ пяти-угольникъ $cbafk = abcdef$. Треугольникъ $ckf = cfh$, а придавъ къ каждому четвероугольникъ $abcf$, будетъ пяти-угольникъ $abckf$ равенъ четверо-

стороннику *abch*; также треугольникъ $acg = \Delta ach$ (§ 158. *Слѣд.* 2); а придавъ къ каждому изъ нихъ треугольникъ *abc*, будетъ треугольникъ *bcg* равенъ четвероугольнику *abch*; но четвероугольникъ $abch = abckf = abcdef$; слѣдовательно треугольникъ *bgc* равенъ многоугольнику *abcdef*.

§ 290. ЗАДАЧА. *Превратить пяти-угольникъ aedcb въ треугольникъ, котораго бы верхъ лежалъ въ точкѣ o, а основаніе проходя чрезъ точку a, было бы параллельно боку cd.* Фиг. 223.

Рѣшен. Чрезъ точку *a* проведи линѣю *gi* параллельно къ *cd*, *bf* параллельно къ *ac*, *eh* параллельно къ *ad*, и проведи линѣи *dh* и *cf*; потомъ преврати трапецію *fcdh* въ треугольникъ *goi* (§ 284), получишь желаемое.

Доказ. Поелику треугольникъ $afc = \Delta acb$, и треугольникъ $adh = \Delta aed$ (§ 158. *Слѣд.* 2), то придавъ къ каждому изъ нихъ треугольникъ *cad*, будетъ $afc + acd + adh = fcdh = \Delta acb + acd + aed = abcde$; но четверосторонникъ $fcdh = \Delta goi$ по рѣшенію (§ 284); слѣдовательно треугольникъ *goi* равенъ пяти угольнику *abcde*.

§ 291. ЗАДАЧА. *Многоугольникъ abcdef превратить по углу abc и боку bc въ треугольникъ.* Фиг. 224.

Рѣшен. Проведя *fg* параллельно къ *ae*, соедини точки *e* и *g* прямою линѣею *eg*; потомъ пяти-угольникъ *bcdeg* преврати въ треугольникъ *bch* (§ 287), получишь желаемое.

Доказ. Поелику треугольникъ $afg = \Delta fge$ (§ 158. *Слѣд.* 2); а придавъ къ каждому изъ нихъ многоугольникъ *fgbcde*, будетъ многоугольникъ *abcdef* равенъ пяти-угольнику *gbcde* (*Ариѳм.*

§ 27), который равенъ треугольнику *bch* по рѣшенію (§ 287); слѣдовательно данной многоугольникъ *abcdef* равенъ треугольнику *bch*.

§ 292. ЗАДАЧА. *Данной пяти-угольникъ abcde превратить въ треугольникъ fgh, коего бы верхъ лежалъ въ данной точкѣ g, а основаніе въ прямой линѣи съ основаніемъ ae* (Фиг. 225.

Рѣшен. и *Доказ.* Пяти-угольникъ *abcde* преврати въ треугольникъ *ick* (§ 286), а сей треугольникъ *ick* преврати въ другой *fgh*, коего бы верхъ лежалъ въ точкѣ *g* (§ 277), получишь желаемое.

§ 293. ЗАДАЧА. *Неравносторонній треугольникъ abc превратить въ равносторонной afg* (Фиг. 226.

Рѣшен. На линѣи *ab* начерти равносторонній треугольникъ *abe*, и продолживши *ae*, проведи *cd* параллельно къ *ab*, пока пересѣчется съ продолженною *ea* въ точкѣ *d*; на *ed* описавъ полкруга, поставь изъ *a* перпендикуляръ *af*, на которомъ сдѣлай равносторонной треугольникъ *afg*, то оной будетъ равенъ данному треугольнику *abc*.

Доказ. Поелику треугольники *aeb* и *abd* имѣютъ общую высоту *bh*, то будетъ треугольникъ $aeb : \Delta abd = ae : ad$ (§ 172. *Слѣд.*); а для подобія треугольниковъ *aeb* и *afg* будетъ треугольникъ $aeb : \Delta afg = ae : ad$ (§ 246); по сему треугольникъ $aeb : abd = aeb : afg$; но треугольникъ $aeb = aeb$, слѣдовательно треугольникъ $afg = abd = abe$ (*Ариѳм.* § 125).

Примѣч. Такимъ образомъ всякой многоугольникъ превратя сперва въ какой нибудь треугольникъ, можно превратить въ равносторонной треугольникъ.

§ 294. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc превратить въ какой нибудь правильной многоугольникъ, на прим. въ пяти-угольникъ bkih.* (Фиг. 227.

Рѣшен. Начертя сперва произвольной многоугольникъ, подобной требуемому, какъ здѣсь *noq* (§ 112), а на линѣи *ab* треугольникъ *abd* подобенъ *nop* (§ 49), чтобы уголъ *d* былъ равенъ *npo*; продолжи *db* до *e*, проведи *ce* параллельно къ *ab* и линѣю *ae*; раздѣли *eb* на столько равныхъ частей, сколько требуемой многоугольникъ боковъ имѣетъ, какъ-то: 1, 2, 3, 4 и 5 частей; потомъ между *bd* и частію *b*1 сыщи среднюю пропорціональную линѣю *bg* (§ 125); изъ точки *g* радіусомъ *bg* опиши кругъ *bhikl*, въ которомъ начерти правильной многоугольникъ *hiklb* требуемаго числа боковъ, получишь желаемое.

Доказ. Треугольникъ *abd* : *ab*1 = *db* : *b*1 имѣющіе одну высоту *as* (§ 179. *Слѣд.*); но поелику треугольникъ *abd* подобенъ *bgh*, то будетъ треугольникъ *abd* : *bgh* = Δ*db* : *b*1 (§ 246); а для равенства содержаній будетъ *abd* : *ab*1 = *abd* : *bgh*; но треугольникъ *abd* = *abd*; слѣдовательно треугольникъ *ab*1 = *bgh*; треугольникъ же *ab*1 = *bgh*, равенъ пятой части треугольника *abe* или *abc* (§ 158. *Слѣд.* 2); и равенъ также пятой части правильнаго пятиугольника *bhikl* (§ 99. *Слѣд.* 1); слѣдовательно треугольникъ *abc* = пяти-угольнику *bhikl*.

Примѣч. Такимъ образомъ всякой многоугольникъ, превратя сперва посредствомъ предыдущихъ задачь въ треугольникъ, можно превратить въ желаемой правильной многоугольникъ.

§ 295. ЗАДАЧА. *Всякой многоугольникЪ превратить вЪ квадратЪ, на прим. пяти-угольникЪ abcde.* Фиг. 228.

РѢшен. и *Доказ.* Сперва данной многоугольникЪ *abcde* преврати вЪ треугольникЪ *bcg* (§ 287), а сей треугольникЪ преврати вЪ прямоугольникЪ *gq* (§ 266); наконецЪ прямоугольникЪ *gq* превратя вЪ квадратЪ *bl* (§ 274), получишь желаемое.

§ 296. ЗАДАЧА. *Начертить многоугольникЪ amnop подобный abcde, и равный данному* B. (Ф. 229.

РѢшен. Сперва данной многоугольникЪ B, также и *abcde*, преврати вЪ квадраты *fh* и *ak* (§ 295); на боку *al* квадрата *ak* сдѢлай *ah* равную боку *af* квадрата *fh* равнаго многоугольнику B; изЪ точки *h* проведи *hm* параллельно *lb*; потомЪ проведя дiогонали *ac* и *ad*, проведи линѢю *mn* параллельно кЪ *bc*, *on* параллельно кЪ *dc*, и *op* параллельно кЪ *ed*, то произойдетЪ многоугольникЪ *amnop* равный данному B и подобный *abcde*.

Доказ. Поелику треугольникЪ *abl* подобенЪ треугольнику *ahm*, то будетЪ $al : ah = ab : am$ (§ 117), и $\overline{al}^2 : \overline{ah}^2 = \overline{ab}^2 : \overline{am}^2$ (*Ариѳм.* § 129); а для подобiя многоугольниковЪ будетЪ $abcde : amnop = \overline{ab}^2 : \overline{am}^2$ (§ 243); по сему $abcde : amnop = \overline{al}^2 : \overline{ah}^2$; но $\overline{al}^2$ равенЪ многоугольнику *abcde* по рѢшенiю, слѢдовательно $amnop = \overline{ah}^2$ равно данному многоугольнику B.

ПримѢч. ТакимЪ образомЪ всякой многоугольникЪ вЪ правильной, или вЪ подобной неправильной многоугольникЪ превращенЪ быть можетЪ.

§ 297. ЗАДАЧА. *Данной кругъ bh превратить въ квадратъ eg.* Фиг. 230.

Рѣшен. и *Доказ.* На концѣ *b* радіуса *ab*, поставя перпендикуляръ *bc*, раздѣли діаметръ *bh* на 113 равныхъ частей, сдѣлай *bc* равное 355 такимъ же частямъ, проведи изъ *c* въ центръ *a* линѣю *ac*, будетъ треугольникъ *abc* равенъ данному кругу *bh* (§ 234. *Слѣд.* 1); потомъ треугольникъ *abc* преврати въ прямоугольникъ *be* (§ 266). Наконецъ прямоугольникъ *be* преврати въ квадратъ *eg* (§ 274), будетъ равенъ данному кругу *bh*.

§ 298. ЗАДАЧА. *Квадратъ ab превратить въ кругъ.* Фиг. 231.

Рѣшен. Раздѣли бокъ *bc* квадрата *ba* на 11 равныхъ частей, продолжи *cb* до *d* такъ, чтобы *bd* была равна 14ти такимъ же частямъ; опиши на *cd* половину круга *cde*; изъ *b* поставь перпендикуляръ *be*, опиши кругъ *ebg*, который будетъ равенъ данному квадрату *ab*.

Доказ. Поелику $\overline{cb}^2 : \overline{be}^2 = cb : bd$ (§ 245) $= 11 : 14$, также и площадь круга $beg : \overline{be}^2 = 11 : 14$ (§ 238); а для равенства содержаній будетъ $\overline{cb}^2 : \overline{be}^2 = gbe : \overline{be}^2$; но $\overline{be}^2 = \overline{be}^2$; слѣдовательно кругъ $beg = \overline{cb}^2$ (*Ариѳм.* § 125).

Примѣч. Сїе превращенїе квадрата въ кругъ разсуждается по пропорцїи дїаметра къ окружности 7 : 22, которую изобрѣлъ Архимедъ; но какъ Мецїево содержанїе дїаметра къ окружности какъ 113 къ 355, ближе къ точности, нежели 7 къ 22; то для вѣрнѣйшаго превращенїя квадрата въ кругъ, надлежитъ бокъ онаго, раздѣля на 355 равныхъ частей, искать среднюю пропорцїональную линѣю между 355 и 452, и взявъ оную за дїаметръ, сдѣ-

лать кругъ, которой равенствомъ квадрату будетъ ближе перваго (§ 238. *Прив.* 1).

§ 299. ЗАДАЧА. *Кругъ abc превратить въ полкруга.* (Фиг. 232.

Рѣшен. Поставь изъ центра d, на дiаметрѣ ab перпендикуляръ dc, проведи bc, и продолживши оную до e, радiусомъ bc опиши полкруга cef, которой будетъ равенъ площади круга abc.

Доказ. Поелику $db = dc$ и $\overline{db}^2 + \overline{cd}^2 = \overline{bc}^2 = 2\overline{db}^2$ (§ 174), слѣдовательно $\overline{bc}^2$ вдвое больше $\overline{bd}^2$; но площади круговъ содержатся между собою какъ квадраты радiусовъ, по сему площадь круга радiуса bc вдвое площади круга радiуса bd; слѣдовательно половина круга cef равна площади круга abc.

§ 300. ЗАДАЧА. *Полкруга adb превратить въ кругъ.* Фиг. 233.

Рѣшен. Поставь изъ центра c на дiаметрѣ ab перпендикуляръ dc, проведи db, сдѣлай на оной кругъ, которой будетъ равенъ данному полкругу adb.

Доказ. Поелику луночка $debfd$ равна треугольнику bcd (§ 249), къ коимъ придавъ общiй отрѣзокъ $dbed$, будетъ полкруга dbf равно четверти круга $cbed$; слѣдовательно кругъ $dcbf$ равенъ полкругу $adeb$.

§ 301. ЗАДАЧА. *Элипсисъ acbd превратить въ кругъ.* Фиг. 234.

Рѣшен. Продолживши ab, сдѣлай $bf = cd$; потомъ сыщи между ab и bf среднюю пропорцiональную линѣю be, и раздѣля оную пополамъ, опиши кругъ be, которой будетъ равенъ элипсису $acbd$ (§ 259).

О сложеніи плоскостей.

§ 302. ЗАДАЧА. *Начертить пяти-угольникъ* D *равный даннымъ плоскостямъ* A *и* C. Фиг. 235.

Рѣшен. Преврати кругъ A въ квадратъ *f*, также и четвероугольникъ C въ квадратъ B (§ 297 и 295); взявъ бокъ квадрата *f* за основаніе *gh*, а бокъ *de* квадрата B за высоту *gi*, проведи линѣю *ih*, на которой начерти квадратъ *im*; то оной будетъ равенъ двумъ даннымъ плоскостямъ A и C (§ 174); потомъ квадратъ *im* преврати въ пяти-угольникъ D (§ 294), получишь желаемое.

§ 303. ЗАДАЧА. *Начертить многоугольникъ* Q, *подобный и равный тремъ даннымъ плоскостямъ* A, B *и* C. Фиг. 236.

Рѣшен. Взявъ бокъ *hp* многоугольника C за основаніе *ik*, а бокъ *fg* плоскости B за высоту *il*, проведи *lk*, на концѣ которой поставя перпендикуляръ *lm* равный боку *de* многоугольника A, проведи *mk*, на которой начерти многоугольникъ Q, подобный одному изъ данныхъ (§ 150); то получится многоугольникъ Q=A+B+C.

Доказ. Когда на линѣѣ *lk* начертится многоугольникъ подобный данному, то оной будетъ равенъ суммѣ двухъ плоскостей C и B (§ 247); и по той же причинѣ многоугольникъ Q равенъ плоскости A (которой основаніе *de*=*ml*), и подобной плоскости, начертиться должной на линѣи *kl*, которая равна суммѣ плоскостей C и B; слѣдовательно многоугольникъ Q равенъ суммѣ данныхъ плоскостей A+B+C.

Примѣч. Такимъ образомъ всѣ подобныя плоскости складываются. Когда же они будутъ не подобны, то должно ихъ превращать въ подобныя, и при сложенiи оныхъ поступать какъ въ прошедшихъ двухъ задачахъ показано.

О вычитанiи плоскостей.

§ 304. ЗАДАЧА. *Квадратъ* В *вычесть изъ квадрата* А. (Фиг. 237.

Рѣшен. На боку большаго квадрата А, опиши полкруга *ace*, отъ *c* до *e* положи бокъ *fg* меньшаго квадрата В; проведи хорду *ed*, начерти квадратъ *eh*, то оной будетъ равенъ разности двухъ квадратовъ А и В.

Доказ. Поелику треугольникъ *ced* есть прямоугольной (§ 71. *Слѣд.* 2); то будетъ $\overline{cd}^2 - \overline{ce}^2 = \overline{ed}^2$, то есть $A - B = \overline{ed}^2$ (§ 174. *Приб.* 2).

Примѣч. Такимъ же образомъ всякую подобную плоскость изъ другой подобной вычитать надлежитъ; когдажъ онѣ будутъ не подобны, то должно ихъ превращать въ подобныя, и поступать далѣе, какъ въ сей задачѣ показано.

О увеличиванiи плоскостей.

§ 305. ЗАДАЧА. *Начертить треугольникъ въ два съ половиною раза больше треугольника abc, и чтобы они были одной высоты.* (Фиг. 238.

Рѣшен. По продолженiи *ab*, сдѣлай $bd = 1\frac{1}{2}ab$, проведи линѣю *dc*, то треугольникъ *acd* будетъ желаемой.

Доказ. Поелику треугольникъ $abc : \triangle acd = ab : ad$, одной высоты *ce* (§ 172. *Слѣд.*); но $ab : ad$

$=1:2\frac{1}{2}$; по сему треугольникъ $abc:\Delta acd=1:2\frac{1}{2}$, слѣдовательно треугольникъ acd въ два съ половиною раза больше треугольника acb.

§ 306. ЗАДАЧА. *Начертить треугольникъ adc въ два и три четверти раза болѣе даннаго треугольника abc, и чтобы имѣли одно основаніе ac.* Фиг. 239.

Рѣшен. Раздѣля перпендикуляръ be на четыре равныя части, продолжи оной до d такъ, чтобы ed равна была $2\frac{3}{4}be$; потомъ проведя ad и dc, получится требуемой треугольникъ adc.

Доказ. Треугольникъ $abe:aed=eb:ed=1:2\frac{3}{4}$; также и треугольникъ $bec:edc=eb:ed=1:2\frac{3}{4}$; и такъ для равенства содержаній будетъ $abe:aed=bec:edc=1:2\frac{3}{4}$, и для того будетъ $abe+bec:aed+edc=1:2\frac{3}{4}$ (*Ариѳм.* § 13), то есть треугольникъ $abc:\Delta adc=1:2\frac{3}{4}$; слѣдовательно треугольникъ adc въ $2\frac{3}{4}$ раза больше треугольника abc (*Ариѳм.* § 126).

§ 307. ЗАДАЧА. *Начертить треугольникъ, которой бы въ два и двѣ трети раза былъ болѣе треугольника abc, и подобенъ оному.* Фиг. 240.

Рѣшен. Раздѣля ab на три равныя части, продолжи ab до f такъ, чтобъ af равна была $2\frac{2}{3}ab$; потомъ сыщи между ab и af среднюю линѣю ag, и сдѣлавъ $ad=ag$, проведи de параллельно къ боку bc, то получится требуемой треугольникъ ade.

Доказ. Ибо изъ подобныхъ треугольниковъ видно, что $abc:ade=ab:af$ (§ 246); но af въ $2\frac{2}{3}$ болѣе ab; слѣдовательно и Δade въ $2\frac{2}{3}$ болѣе Δabc.

§ 308. ЗАДАЧА. *Начертить треугольникъ подобный данному abc, и чтобы abc содержался къ требуемому, какъ линѣя af къ fg.* Фиг. 241.

Рѣшен. Сыщи къ линѣѣ af, fg и къ основанію ac четвертую пропорціональную линѣю ce (§ 122); потомъ между основаніемъ ac и четвертою пропорціональною ce, сыщи среднюю ch (§ 125); начерти на ней треугольникъ chk подобный данному abc (§ 49), то получишь требуемое.

Доказ. Поелику $af:fg=ac:ce$ по рѣшенію, также и треугольникъ $abc:chk=ac:ce$ (§ 246); а для равенства содержаній будетъ треугольникъ $abc:chk=af:fg$.

Примѣч. Такимъ образомъ всякой многоугольникъ увеличивается въ содержаніи линѣй.

§ 309. ЗАДАЧА. *Начертить четвеустороннинкъ, котораго бы плоскость была втрое больше даннаго четвеустороннника abcd и которой былъ бы подобенъ данному четвеустороннику.* Фиг 242.

Рѣшен. Изъ произвольно взятой внутри плоскости точки e, проведи во всѣ углы линѣи, и продолживъ eb до f такъ, чтобы была $ef=3eb$, сыщи между eb и ef среднюю пропорціональную линѣю eh; потомъ сдѣлавъ $eg=eh$, проведи gi параллельно къ bc, ik параллельно къ dc, kl параллельно къ ad, и проведя ig, произойдетъ четвеустороннникъ $gikl$, плоскостью втрое больше даннаго $abcd$ и подобный оному.

Доказ. Поелику для подобія четвеустороннниковъ будетъ $abcd:glki=eb:ef$ (§ 246); но ef втрое больше eb, слѣдовательно и четвеустороннникъ $gikl$ втрое больше $abcd$.

Примѣч. Такимъ образомъ всякая правильная и неправильная плоскость увеличивается во столько разъ, во сколько потребно.

§ 310. ЗАДАЧА. *Начертить многоугольникъ подобный данному abcdef, и чтобы данный содержался къ требуемому какъ 3 къ 5. Фиг. 243.*

Рѣшен. Раздѣля бокъ *ab* на три равныя части, на продолженной *ab* сдѣлай *bg* равную $\frac{5}{3}ab$; потомъ сыскавъ между *ab* и *bg*, то есть между 3мя и 5ю частями, среднюю пропорціональную линѣю *bh*, сдѣлай *bn* = *bh*, проведи *mn* параллельно къ *af*, *nl* параллельно къ *ef*, *lk* параллельно къ *ed*, *ki* параллельно къ *dc*, то изобразится требуемой многоугольникъ *biklmn*.

Доказ. Ибо для подобія многоугольниковъ будетъ *abcdef* : *biklmn* = *ab* : *bg* (§ 246); но *ab* : *bg* = 3 : 5, слѣдовательно и *abcdef* : *biklmn* = 3 : 5.

Примѣч. Такимъ образомъ всякая подобная плоскость увеличивается въ данномъ содержаніи чиселъ.

§ 311. ЗАДАЧА. *Къ многоугольнику abcd, котораго площадь равна 2850°, прирѣзать 1800° квадратныхъ, параллельно всѣмъ бокамъ. Ф. 242.*

Доказ. Данныя плоскости сложи вмѣстѣ, коихъ сумма 2850 + 1800 = 4650° будетъ означать площадь требуемаго многоугольника; слѣдовательно Геометрическое содержаніе даннаго четвеpосторонника *abcd* къ требуемому будетъ 2850 : 4650, а по раздѣленіи каждаго члена содержанія на такое число, на какое будетъ можно какъ здѣсь на 150, будетъ площадь даннаго четвеpосторонника *abcd* содержаться къ площади искомаго какъ 19 : 31. И такъ изъ произвольно взятой внутри четвеpосторонника точки *e*, проведя ко всѣ углы линѣи, раздѣли какую нибудь изъ нихъ, *на прим.* *eb* на 19 равныхъ частей; потомъ продолживши *eb* сдѣлай *ef* равное 31 такой же части;

сыщи между eb и ef среднюю пропорціональную линѣю eh, сдѣлай $eg=eh$; напослѣдокъ проведи gi параллельно къ bc, ik параллельно къ cd, kl параллельно къ ad и проведи lg, то получится требуемой четвеֹросторонникъ $gikl$.

Доказ. Поелику площадь четвеֹросторонника $abcd:gikl=eb:ef$ (§ 246); но $eb:ef=19:31$ $=2850:4650$ по рѣшенію; по сему $abcd:gikl$ $=2850:4650$; но $abcd=2850°$, по сей причинѣ и площадь четвеֹросторонника $gikl=4650°$ квадр.; слѣдовательно, когда изъ плоскости четвеֹросторонника $gikl$ вычтется плоскость четвеֹросторонника $abcd$, то остатокъ 1800° квадр. будетъ требуемая площадь, прирѣзанная параллельно бокамъ даннаго четвеֹросторонника $abcd$.

Примѣч. Такимъ образомъ ко всякому многоугольнику прирѣзывается параллельно къ бокамъ желаемое число квадратныхъ саженъ; или придается такая часть, какая потребуется, какъ *на прим.* $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{8}$ и проч. даннаго многоугольника.

О дѣленіи плоскостей.

§ 312. ЗАДАЧА. *Раздѣлить треугольникъ abc изъ угла b на три равныя части.* Фиг. 244.

Рѣшен. Раздѣля основаніе ac на три равныя части въ d и e, проведи изъ b линѣи bd и be, коими данной треугольникъ раздѣлится на три равныя части.

Доказ. Поелику треугольники bad, bde и bec, имѣютъ равныя основанія $ad=de=ec$ и одну высоту bf, слѣдственно равны между собою (§ 158. *Слѣд.* 2).

§ 313. ЗАДАЧА. *Четвероторонникъ abcd, изъ угла c раздѣлить линѣею cf на двѣ равныя части.* (Фиг. 245.

Рѣшен. Превратя четвероторонникъ *abcd* въ треугольникъ *cde* (§ 268), раздѣли *ed* въ *f* на двѣ равныя части, и проведи *cf*, то оная раздѣлитъ данной четвероторонникъ на двѣ равныя части.

Доказ. Поелику треугольникъ *cde* равенъ четвероторонику *abcd*, и треугольникъ $cef = cfd$ по рѣшенію; слѣдственно треугольникъ $cfd = \frac{1}{2}\Delta ced$ равенъ половинѣ четвероторонника *abcd*.

Примѣч. Когда точка *f* будетъ внѣ четвероторонника (*фиг.* 246); то проведя *fg* параллельно къ *ac*, проведи *cg*, то оная раздѣлитъ четвероторонникъ *abcd* пополамъ; ибо треугольникъ $acf = acg$ (§ 158. *Слѣд.* 2); а придавъ къ нимъ треугольникъ *acd*, будетъ треугольникъ $acf + acd = cfd = acg + acd = agcd$; но треугольникъ $cfd = \frac{1}{2}\Delta ced = \frac{1}{2}abcd$ по рѣшенію (§ 312), слѣдовательно четвероторонникъ $agcd = \frac{1}{2}abcd$.

§ 314. ЗАДАЧА. *Четвероторонникъ abcd изъ угла c раздѣлить линѣями на три равныя части.* (Фиг. 247.

Рѣшен. Преврати четвероторонникъ *abcd* въ треугольникъ *cde* (§ 268); потомъ раздѣля основаніе *ed* на три равныя части въ *g* и *f*, проведи *fh* параллельно къ *ac*, наконецъ проведи *hc* и *gc*, то сими линѣями четвероторонникъ *abcd* раздѣлится на три равныя части.

Доказ. Поелику треугольникъ $ged = \Delta gcf = \Delta fce = \frac{1}{3}abcd$ по рѣшенію (§ 312); и треугольникъ $ach = acf$ (§ 158. *Слѣд.* 2), а придавъ къ нимъ треугольникъ *acg*, будетъ треугольникъ $\Delta ach + \Delta acg = agch = \Delta acf + \Delta acg = \Delta gcf = \frac{1}{3}abcd$;

по сему треугольникъ $cgd + agch = \frac{2}{3} adcb$; слѣдственно треугольникъ $clb = \frac{1}{3} abcd$.

§ 315. ЗАДАЧА. *Пяти-угольникъ acbed, изъ угла a раздѣлить на три равныя части.* (Ф). 248.

Рѣшен. Преврати пяти-угольникъ *acbed* въ треугольникъ *afg* (§ 286); раздѣли *fg* на три равныя части въ *h* и *i*, проведи линѣи *ai*, и *hk* параллельно къ *ab*, а изъ *k* въ *a* линѣю *ak*, то данной пяти-угольникъ *acbed* линѣями *ai* и *ak* раздѣлится на три равныя части.

Доказ. Треугольникъ $aed = aeg$ (§ 158. *Слѣд.* 2); а придавъ къ нимъ треугольникъ *aie*, будетъ треугольникъ $aig = aied = \frac{1}{3} \Delta afg = \frac{1}{3}$ пяти-угольника *acbed*. Также треугольникъ $abh = \Delta abk$ (§ 158. *Слѣд.* 2); а придавъ къ нимъ треугольникъ *abi*, будетъ треугольникъ *aih* равенъ четвеpосторроннику $aibk = \frac{1}{3} \Delta afg = \frac{1}{3}$ пяти-угольника *acbed*; по сему и треугольникъ *akc* равенъ $\frac{1}{3}$ пяти-угольника *acbed*.

§ 316. ЗАДАЧА. *Пяти-угольникъ abcdm, изъ угла a раздѣлить на четыре равныя части.* (Ф). 249.

Рѣшен. Превратя пяти-угольникъ *abcdm* въ треугольникъ *ab4*, раздѣли основаніе *b4* на четыре равныя части въ точкахъ 1, 2 и 3, проведи *h2* и *n3* параллельно къ *ac*; потомъ проведи линѣи *a1*, *ah* и *an*, то оными пяти-угольникъ *bm* раздѣлится на требуемое число частей.

Доказ. Проведи линѣи *a2* и *a3*, будетъ треугольникъ $ab1 = \Delta 1a2 = \Delta 2a3 = \Delta 3a4$ (§ 158. *Слѣд.* 2) $= \frac{1}{4} \Delta ab4$, или $= \frac{1}{4}$ пяти-угольника *abcmd* по рѣшенію (§ 312); но треугольникъ $ca2 = \Delta cha$ (§ 158. *Слѣд.* 2), то придавъ къ нимъ треугольникъ *ca1*, будетъ треугольникъ $1a2 = 1cha =$

$\frac{1}{4}$ пяти-угольника *bm*; также треугольникъ *ac*3=Δ*acn* (§ 158. *Слѣд.* 2); а отнявъ отъ нихъ равные треугольники *ac*2 и *ach*, то останется треугольникъ 2*a*3=*ahn*=$\frac{1}{4}$ пяти-угольника *bm*; слѣдственно четвеpосторонникъ *amdn*=$\frac{1}{4}$ пяти-угольника *bm*.

§ 317. ЗАДАЧА. *Отъ многоугольника aec, изъ угла b, линѣею bd, отрѣзать пять шестинъ.* Фиг. 250.

Рѣшен. Преврати многоугольникъ *aec* въ треугольникъ *abh* (§ 287) и отдѣля отъ основанія *ah* часть *af*=$\frac{5}{6}$ *ah* (§ 128), проведи *fk* параллельно къ *be*, *kd* параллельно къ *bg*, а изъ *b* въ *d* линѣю *bd*, которая отъ многоугольника *baegc* отдѣлитъ желаемую часть *abdge*.

Доказ. Треугольникъ *bef*=Δ*bek* (§ 158. *Слѣд.* 2); а придавъ къ каждому изъ нихъ треугольникъ *aeb*, будетъ треугольникъ *abf* равенъ четвеpосторонннику *aekb*; треугольникъ же *bgk*=Δ*bgd*; а придавъ къ нимъ четвеpосторонникъ *aegb*, будетъ треугольникъ *bgk*+*aegb*=*aekb*=*bgd*+*aegb*=*aegdb* (*Ариѳм.* § 27); по сему многоугольникъ *aegdb*=Δ*abf* (*Ариѳм.* § 20); но треугольникъ *abf*=$\frac{5}{6}\Delta$*abh*=$\frac{5}{6}$ многоугольника *aec*; слѣдовательно и многоугольникъ *aegdb*=$\frac{5}{6}$ многоугольника *aec*.

§ 318. ЗАДАЧА. *Раздѣлить многоугольникъ abcde, линѣею ao на двѣ равныя части.* Фиг. 251.

Рѣшен. Превратя многоугольникъ *be* въ треугольникъ *aef* (§ 291), раздѣли *ef* въ *g* пополамъ; проведи *ag*, и *dl* параллельно къ *gc*, *lo* параллельно къ *ac*; потомъ проведи изъ *a* въ *o* линѣю *ao*, то оная раздѣлитъ многоугольникъ *abcde* на желаемыя части.

Доказ. Треугольникъ $gcl = \Delta gcd$, и $\Delta cla = \Delta coa$ (§ 158. *Слѣд.* 2); а придавъ къ суммѣ двухъ первыхъ и послѣднихъ многоугольникъ $gcaeg$, будетъ треугольникъ $gcl + cla + gcaeg = \Delta gcd + \Delta coa + gcaeg$, то есть треугольникъ age равенъ многоугольнику $aocde$; но треугольникъ $age = \frac{1}{2}\Delta eaf = \frac{1}{2}$ многоугольника $abcde$ по рѣшенію; слѣдовательно и многоугольникъ $aocde$ равенъ половинѣ многоугольника $baedc$.

Примѣч. Когда точка g будетъ находиться внѣ даннаго многоугольника be (*фиг.* 252); то продолжа ag, проведи dh параллельно gc, и hk параллельно къ ae, точки k и a соедини прямою линѣею ak, которая многоугольникъ be раздѣлитъ на двѣ равныя части. Ибо треугольникъ clh равенъ четверостороннику $clgd$ по рѣшенію, и треугольникъ akc равенъ треугольнику $ach = acl + clgd =$ многоугольнику $acdga$; а когда къ первому и послѣднему изъ сихъ придать многоугольникъ $acdea$, будетъ треугольникъ $akc + acdea = acdga + acdea$, то есть многоугольникъ $akcdea$ Δaeg; но $\Delta age = \frac{1}{2} afe = \frac{1}{2}$ многоугольника be; слѣдовательно и $akcdea = \frac{1}{2}$ даннаго многоугольника be.

§ 319. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc, изъ точки d, лежащей на основаніи ab, раздѣлить на три равныя части.* (Фиг. 253.

Рѣшен. Раздѣля основаніе ab на три равныя части въ i и e, проведи ih и eg параллельно къ линѣи dc; потомъ проведи dh и dg, то оными треугольникъ abc раздѣлится въ желаемыя части.

Доказ. Треугольникъ $cdi = \Delta cdh$ (§ 158. *Слѣд.* 2); а придавъ къ нимъ треугольникъ acd, будетъ треугольникъ aci равенъ четвероугольнику $achd$; также треугольникъ $cge = \Delta dge$ (§ 158. *Слѣд.* 2); а придавъ къ нимъ треуголь-

никЪ ebg, будетЪ $\triangle cbe = \triangle gbd$; но треугольникЪ $aci = \triangle cbe = \frac{1}{3}\triangle acb$ по рѣшенію, по сему четвероугольникЪ $achd = \triangle dgb = \frac{1}{3}\triangle acb$; слѣдовательно и треугольникЪ $dgh = \frac{1}{3}\triangle acb$.

§ 320. ЗАДАЧА. *Пяти-угольникЪ abd, изЪ точки f лежащей на основаніи, раздѣлить на три равныя части.* Фиг. 254.

Рѣшен. Преврати пяти-угольникЪ вЪ треугольникЪ cdh (§ 286); и раздѣли ch на три равныя части вЪ e и g, проведи ei и gh параллельно df; потомЪ проведи fi и fh, которыми пяти-угольникЪ abd раздѣлится на три равныя части.

Доказ. Поелику пяти-угольникЪ $abldk$, линѣями de и dg раздѣленЪ на три равныя части (§ 315); треугольникЪ же $eif = \triangle eid$ (§ 158. *Слѣд.* 2); то придавЪ кЪ нимЪ четвероугольникЪ $aeik$, будетЪ треугольникЪ $eif + aeik = eid + aiek$, т. е. четвероугольникЪ $afik = aedk$; но $aedk = \frac{1}{3}$ пяти-угольника adb; по сему $afik = \frac{1}{3}$ пяти-угольника adb. Также докажется, что и четвероугольникЪ $fblh = \frac{1}{3}$ пяти-угольника abd; слѣдовательно и четвероугольникЪ $fidh = \frac{1}{3}$ пяти-угольника abd.

§ 321. ЗАДАЧА. *ТреугольникЪ abc, изЪ точки d, лежащей внутри онаго, раздѣлить на три равныя части.* Фиг. 255.

Рѣшен. Раздѣли ac на три равныя части вЪ h и f, проведи изЪ b линѣи be и bg параллельно кЪ dh и df; потомЪ проведя ed, dg и db, то сими линѣями треугольникЪ abc раздѣлится на три равныя части.

Доказ. ТреугольникЪ $ebh = \triangle ebd$ (§ 158. *Слѣд.* 2); а придавЪ кЪ нимЪ треугольникЪ $\triangle eba$,

будетъ треугольникъ $ebh + \Delta eba = \Delta ebd + \Delta cba$, то есть треугольникъ abh равенъ четвероугольнику $abde$. Также докажется, что четвероугольникъ $cbdg = \Delta cbf$; но треугольникъ $ebh = \Delta bf \frac{1}{3} \Delta abc$ по рѣшенію (§ 312), по сему четвероугольникъ $abde = bcgd = \frac{1}{3} \Delta abc$; слѣдовательно и треугольникъ $egd = \frac{1}{3} \Delta abc$.

§ 322. ЗАДАЧА. *Пяти-угольникъ aibco, изъ точки f лежащей внутри онаго, раздѣлить на три равныя части.* (Фиг. 256.

Рѣшен. Преврати пяти-угольникъ въ треугольникъ fgh (§ 292), раздѣли gh на три равныя части въ d и l; проведи de параллельно къ fi, hn параллельно къ af, mn параллельно къ fo; потомъ проведя fl, fe и fn, то пяти-угольникъ раздѣлится въ желаемыя части.

Доказ. Треугольникъ $fid = \Delta fie$ (§ 258 *Слѣд.* 2); а придавъ къ нимъ треугольникъ fli, будетъ $fid + fli = fie + fli$, то есть четвероугольникъ $flie = \Delta fld$. Также треугольникъ $afh = \Delta afm$; а придавъ къ нимъ треугольникъ afl, будетъ четверосторонникъ $lfma = \Delta lfh$; треугольникъ же $ofm = \Delta ofn$ (§ 158. *Слѣд.* 2); а придавъ къ нимъ четвероугольникъ $alfo$, будетъ $lfma = lfnoa = \Delta lfh$; но треугольникъ $fld = \Delta lfh$ равенъ $\frac{1}{3}$ пяти-угольника abo по рѣшенію; по сему и четвероугольникъ $flie = lfnoa = \frac{1}{3}$ пяти-угольника abo; слѣдовательно и многоугольники $fibcn$ равны $\frac{1}{3}$ пяти-угольника abo.

Примѣч. Такимъ образомъ и всѣ правильные и неправильные многоугольники, изъ точки, въ равныя и въ данной пропорціи части, дѣлить надлежитъ.

§ 323. ЗАДАЧА. *Въ треугольникѣ abl, найти точку, изъ которой бы проведенными во всѣ*

углы линѣями, треугольникъ abd раздѣлился на три равныя части. (Фиг. 257.

Рѣшен. Изъ третiй части *ae* основанiя *ad*, проведи *ef* параллельно къ *ab*, раздѣли оную въ точкѣ *c* пополамъ, изъ которой проведенныя во всѣ углы линiи *ca*, *cb* и *cd* раздѣлятъ треугольникъ *abc* на три равныя части.

Доказ. Ибо треугольникъ $dbc = \Delta abe$ (§ 158. Слѣд. 2) $= \frac{1}{3}\Delta abd$; а притомъ для параллельныхъ линѣй *ab* и *ef* и что $ec = cf$, будетъ треугольникъ $eca = \Delta cfb$, и треугольникъ $ecd = \Delta cfd$ (§ 158. Слѣд. 2); по сему треугольникъ $eca + \Delta eca = \Delta cfb + \Delta cfd$, то есть треугольникъ $acd = \Delta bcd = \frac{1}{3}$ треугольника *abd*

§ 324. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc раздѣлить на три равныя части, линѣями параллельно къ основанiю ac проведенными.* (Фиг. 258.

Рѣшен. Раздѣли бокъ *ab* на три равныя части въ *d* и *e*, сыщи между *bd* и *ba*, и между *be* и *ba*, среднiя пропорцiональныя *bg* и *bh*; сдѣлай $br = bg$ и $bp = bh$; потомъ проведя линѣи *rv* и *pf* параллельно къ *ac*, треугольникъ *abc* раздѣлится на три равныя части.

Доказ. Ибо для подобiя треугольниковъ $abc : bvr = ab : ab$ (§ 246); но $bd = \frac{1}{3}ab$, по сему и треугольникъ $bvr = \frac{1}{3}\Delta abc$. Также треугольникъ $abc ; \Delta bfp = ab : be$ (§ 246); но $be = \frac{2}{3}ab$, по сему треугольникъ $bfp = \frac{2}{3}\Delta abc$; слѣдственно и часть $apfc = \frac{1}{3}\Delta abc$.

§ 325. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc раздѣлить параллельными линѣями io и kp на три части въ содержанiи линѣй d, e и f.* (Фиг. 259.

Рѣшен. Сдѣлай у точки *c* произвольной уголъ *acn*, положи отъ *c* линѣю *cl* равную *f*,

линѣю lq равную e, и qn равную d; проведи изъ l линѣю lm, изъ q линѣю qh параллельно къ an; сыщи между ca и cm среднюю Геометрическую ci, также между ca и ch среднюю ck; проведи линѣи io и kp параллельно къ ab, то оными треугольникъ abc раздѣлится въ желаемыя части.

Доказ. Поелику треугольникъ abc подобенъ треугольнику ioc, то будетъ треугольникъ $abc:\Delta ioc = ac:mc$ (§ 246), и треугольникъ $abc:\Delta bcm = ac:mc$ (§ 172. *Слѣд.*); а для равенства содержаній будетъ $abc:ioc = abc:bcm$ (*Ариѳм.* § 113); но треугольникъ $abc = \Delta abc$, слѣдственно и треугольникъ $ioc = \Delta bcm$ (*Ариѳм.* § 125). Такимъ же образомъ докажется, что треугольникъ $kpc = \Delta bhc$; а когда отъ сихъ отнимутся равные треугольники ioc и mbc, то останется четвероугольникъ $kpoi = \Delta bhm$; по сей причинѣ и $abpk = \Delta abh$; но треугольникъ $bmc:\Delta bmh:\Delta abh = mc:mh:ha$ (§ 172. *Слѣд.*) $= lc:lq:qn = f:e:d$; слѣдовательно $\Delta ioc:iopk:pkab = f:e:d$.

§ 326. ЗАДАЧА. *Треугольникъ* abc *раздѣлить на двѣ равныя части перпендикуляромъ къ основанію* ab *проведеннымъ.* Фиг. 260.

Рѣшен. Опустя перпендикуляръ cd, сыщи между большею частію ad и половиною основанія $ab = ae$, среднюю пропорціональную ah, сдѣлай $af = ah$; то изъ точки f поставленный перпендикуляръ fg, раздѣлитъ треугольникъ acb на двѣ равныя части.

Доказ. Ибо треугольникъ $adc:\Delta aec = ad:ae$ (§ 172. *Слѣд.*); а изъ подобныхъ треугольниковъ $adc:afg = ad:ae$ (§ 246); то для равенства содержаній будетъ треугольникъ $adc:ace$

$=adc:afg$; но $adc=adc$, по сему $ace=afg=\frac{1}{2}\Delta abc$ (*Ариѳм.* § 125).

Примѣч. Ежели потребно будетъ отъ треугольника *abc*, перпендикуляромъ *fg* отдѣлить $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$ и проч. часть; тогда отъ линѣи *ab* взявъ $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$ и проч. часть$=ae$, сыщи между оною частїю и частїю *ad* среднюю пропорцїональную $ah=af$, и напослѣдокъ поставленнымъ изъ точки *f* перпендикуляромъ *fg* отрѣжется желаемая часть.

§ 327. ЗАДАЧА. *Въ треугольникѣ abc провесть линѣю fg параллельно къ ac такъ, чтобы треугольникъ gbf равенъ былъ данному многоугольнику* B, *которой меньше треугольника abc.* Фиг. 261.

Рѣшен. Данную плоскость B преврати въ треугольникъ *hik*, а сей преврати въ треугольникъ *abd* по основанїю *ab* и углу *abc* (§ 278); потомъ сыщи между *bc* и *bd* среднюю пропорцїональную *be*, положи $bf=be$, изъ точки *f* проведи *fg* параллельно къ *ac*, то будетъ треугольникъ *gbf* равенъ многоугольнику B.

Доказ. Треугольникъ $abc:abd=bc:bd$ (§ 172. *Слѣд.*), а изъ подобныхъ треугольниковъ $abc:bgf=bc:bd$ (§ 246); по сему треугольникъ $abc:abd=abc:bgf$; но треугольникъ $abc=abc$, слѣдовательно $\Delta abd=\Delta bgf=$многоугольнику B.

§ 328. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc изъ точекъ d и e, раздѣлить на три равныя части.* Фиг. 262.

Рѣшен. Отдѣля $af=\frac{1}{3}ac$, и проведя *fh* параллельно къ *db*, точки *d* и *h* соедини прямою линѣею *dh*; потомъ раздѣля *dc* пополамъ въ *g*, проведи *gk* параллельно къ *ch*, и проведи *eh*; то треугольникъ *abc*, линѣями *dh* и *ke*, раздѣлится на три равныя части.

Доказ. Поелику треугольникъ $bdh = \Delta bdf$ (§ 158. *Слѣд.* 2), то будетъ треугольникъ $dbh + abd = \Delta dbf + abd$ (*Ариѳм.* § 27), то есть четвеpосторонникъ $abhd = \Delta abf$; но треугольникъ $abf = \frac{1}{3}\Delta abc$ по рѣшенію, по сему и четверосторонникъ $abhd = \frac{1}{3}\Delta abc$. Также треугольникъ $hge = ekh$ (§ 158. *Слѣд.* 2), и $ehg + ehc = ehk = ehc$ (*Ариѳм.* § 27), то есть треугольникъ gch равенъ четверосторонинку $echk$; но треугольникъ $gch = \frac{1}{2}dhc = \frac{1}{3}abc$ по рѣшенію, по сему и $echk = \frac{1}{3}\Delta abc$.

§ 329. ЗАДАЧА. *Четверосторонникъ abcd изъ точекъ k и h раздѣлить на три равныя части.* Фиг. 263.

Рѣшен. Данной четверосторонникъ ac преврати въ треугольникъ ade. Раздѣли ae на три равныя части въ g и f; проведи fd и gd, то оными треугольникъ ade раздѣлится на три равныя части (§ 312); проведи fi параллельно hd, и gl параллельно kd; а напослѣдокъ проведя hi и kl, четверосторонникъ $abcd$ раздѣлится въ желаемыя части.

Доказ. Поелику треугольникъ $dhf = \Delta dhi$ (§ 158. *Слѣд.* 2), по сему треугольникъ $dhi + \Delta dha = \Delta dhf + \Delta dha$, то есть четвероугольникъ $adih = adf$; но треугольникъ $adf = \frac{1}{3}\Delta ade = \frac{1}{3}abcd$, по сему и $adih = \frac{1}{3}$ четверосторонника $abcd$. Также докажется, что и четверосторонникъ $akld = \Delta agd = \frac{1}{3}\Delta aed = \frac{2}{3}abcd$; по сему будетъ четвероугольникъ $hilk = \Delta dfg = \frac{1}{3}abcd$; слѣдовательно и часть $klcb = \frac{1}{3}$ четверосторонника $adcb$.

§ 330. ЗАДАЧА. *Трапецію ac раздѣлить на четыре равныя части.* Фиг. 264.

Рѣшен. Раздѣля dc и ab на четыре равныя

части въ точкахъ e, f, g, h, i и k, проведи линѣи he, if и gk, которыми трапеція ac раздѣлится на четыре равныя части.

Доказ Ибо треугольникъ $ade = \Delta ehf = \Delta fig = \Delta gkc$; также треугольникъ $aeh = \Delta hfi = \Delta igk = \Delta kcb$ (§ 158. *Слѣд.* 2), по сему части $adeh = hefi = fikg = kgcb$ равны между собою; слѣдовательно каждая равна $\frac{1}{4}$ трапеціи ac.

§ 331. ЗАДАЧА. *Въ треугольникѣ abc найти точку p, изъ которой бы проведенныя параллельно къ бокамъ ab и bc линѣи отдѣлили какую нибудь часть треугольника abc. На прим. $\frac{2}{5}$.* Фиг. 265.

Рѣшен. Взявъ на основаніи ac произвольную точку g, и проведи bg, раздѣли оную на пять равныхъ частей (§ 47); между $\frac{2}{5}bg = bk$ и всею линѣею bg, сыщи среднюю пропорціональную gi; сдѣлай $gp = gi$, тогда точка p будетъ желаемая, изъ которой проведя pd и pf параллельно къ ab и bc, будетъ $\Delta pdf = \frac{2}{5}abc$.

Доказ. Ибо треугольники dpf и abc по начертанію подобны; по сему треугольникъ abc: $\Delta dpf = bg : gk$ (§ 246); но $gk = \frac{2}{5}bg$; слѣдовательно и треугольникъ $dpf = \frac{2}{5}\Delta abc$.

§ 332. ЗАДАЧА. *Отъ даннаго многоугольника afc отдѣлить $\frac{2}{3}$, чтобы бока требуемаго многоугольника были параллельны бокамъ даннаго, а основаніе было бы на основаніи af.* Фиг. 266.

Рѣшен. Изъ произвольно взятой на основаніи af точки g, проведи во всѣ углы линѣи bg, cg, gd и ge; потомъ раздѣля bg на три равныя части, сыщи между bg и $\frac{2}{3}bg = gi$ среднюю пропорціональную gh, сдѣлай $gk = gh$, проведи kp, kl, lm, mn и no параллельно бокамъ ab, bc, cd, de и ef, то будетъ многоугольникъ $plo = \frac{2}{3}afc$.

Доказ. Ибо треугольники даннаго многоугольника afc, подобны треугольникамъ многоугольника pol по начертанію; по сему и многоугольникъ afc подобенъ plo (§ 146); и для того будетъ многоугольникъ $acf : plo = bg : ig$ (§ 246); но $gi = \frac{2}{3}bg$, слѣдов. многоугольникъ $plo = \frac{2}{3}afc$.

§ 333. ЗАДАЧА. *Четвеространникъ $abcd$ раздѣлить на три равныя части такъ, чтобы одна часть отдѣлена была параллельною, а другія двѣ перпендикулярною линѣею къ основанію ad.* (Ф. 267.

Рѣшен. Четвеространникъ $abcd$ преврати въ треугольникъ ado; сдѣлавъ $ol = \frac{1}{3}od$, проведи al, то будетъ треугольникъ $aol = \frac{1}{3}\Delta ado = \frac{1}{3}abcd$ (§ 312); продолжи ab и dc, пока взаимно пересѣкутся въ точкѣ m; между md и ml сыщи среднюю пропорціональную mn, сдѣлай $mf = mn$; изъ f проведи линѣю fe параллельно къ основанію ad. Потомъ раздѣля ef и ad пополамъ въ точкахъ i и k, проведи ik, чрезъ средину p сей линѣи, проведи hg перпендикулярно къ основанію ad, то четвеространникъ $abcd$, линѣями ef и gh, раздѣлится на три равныя части.

Доказ. Поелику треугольникъ $adm : \Delta mef = dm : ml$ (§ 246), и треугольникъ $adm : \Delta alm = dm : ml$ (§ 172. *Слѣд.*); то для равенства содержаній будетъ $adm : mef = adm : alm$; но треугольникъ $adm = \Delta adm$, по сему треугольникъ $mef = \Delta alm$; а отнявъ отъ нихъ равные треугольники bmc и oma, останется треугольникъ $mef - bmc = alm - \Delta oma$, то есть четвеространникъ $ebcf = \Delta aol$; но треугольникъ $aol = \frac{1}{3}\Delta aod = \frac{1}{3}abcd$ по рѣшенію; слѣдовательно и $ebcf = \frac{1}{3}abcd$. Трапеція $aefd = \frac{2}{3}abcd$, линѣею ik раздѣлена пополамъ (§ 330); ибо треугольникъ $pgi = \Delta phk$,

потому что $ip=pk$, уголъ $gip=\angle pkh$ (§ 43), и уголъ $ipg=hpk$ (§ 21); слѣдовательно $gfdh=ifdk=aegh=\frac{1}{3}abcd$.

§ 334. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc, изъ точки d лежащей внѣ онаго, раздѣлить на три равныя части.* Фиг. 268.

Рѣшен. Раздѣли треугольникъ abc на три равныя части линѣями ce и cf (§ 312); потомъ по § 282 преврати треугольникъ cbe въ другой ikb, то же самое сдѣлай и съ треугольникомъ cbf; тогда треугольникъ abc линѣями ik и hg раздѣлится на три равныя части.

Доказ. Поелику треугольникъ $ecb=\Delta ikb$, и треугольникъ $cbf=gbh=\frac{1}{3}\Delta abc$ по рѣшенію (§ 282); по сему треугольникъ $ebc-\Delta fcb=\Delta ikb-\Delta gbh$, то есть треугольникъ $ecf=ikgh=\frac{1}{3}\Delta abc$, слѣдственно и четвеSторонникъ $acki=\frac{1}{3}\Delta abc$.

§ 335. ЗАДАЧА. *Изъ точки n лежащей внѣ трапеціи abcd, раздѣлить оную на три равныя части.* Фиг. 269.

Рѣшен. Раздѣли ad и bc на три равныя части въ g и h, e и f, проведи eg и fh, коими трапеція $abcd$ раздѣлится на три равныя части (§ 330); потомъ изъ точки n чрезъ средину o линѣи ge, и чрезъ средину p линѣи fh, проведи прямыя линѣи nok и npl, коими трапеція раздѣлится въ желаемыя части.

Доказ. Ибо треугольникъ $keo=\Delta goi$, потому что $oe=og$, уголъ $keo=ogi$ (§ 43), и уголъ $koe=goi$ (§ 21); по сему треугольникъ $keo+abkog=ogi+abkog$, $abeg=abki=\frac{1}{3}abcd$. Такимъ образомъ докажется, что $dclm=dcfh=\frac{1}{3}abcd$.

§ 336. ЗАДАЧА. *Неправильный пяти-угольникъ abcde, изъ точки o лежащей внѣ онаго раздѣлить на три равныя части.* Фиг. 270.

Рѣшен. Преврати пяти-угольникъ *abcde* въ треугольникъ *hci* (§ 286); раздѣли *hi* на три равныя части въ *f* и *g*, проведи *cf* и *cg*, коими пяти-угольникъ *ace* раздѣлится на три равныя части (§ 315). Продолжи *hi* въ обѣ стороны, также *bc* и *cd*, пока пересѣкутся съ продолженною въ *q* и *p*, преврати треугольникъ *cfq* въ другой *knq*, чтобы онаго бокъ *n* былъ въ прямой линѣи съ точкою *o* (282). Равнымъ образомъ преврати треугольникъ *cgp*, въ другой *mlp* (§ 282); тогда многоугольникъ *abcde* линѣями *nk* и *ml* раздѣлится на 3 равныя части.

Доказ. Поелику треугольникъ $cfq=\Delta knq$, и треугольникъ $cgp=\Delta lmp$ по рѣшенію (§ 282); а отнявъ отъ первыхъ двухъ общій многоугольникъ *krfq*, а отъ послѣднихъ *lsgp*, останется треугольникъ $kcr=\Delta rfn$, и треугольникъ $cls=\Delta msg$; по сему $kcr+bkrfa=abcf=rfn+bkrfa=abkn=\frac{1}{3}$ пяти угольника *abcde*; также треугольникъ $cls+lsged=cged=msg+lsged=lmed=\frac{1}{3}$ пяти-угольника *abcde*, слѣдовательно и $nkclm=\frac{1}{3}abcde$.

§ 337. ЗАДАЧА. *Четверосторонникъ abcd раздѣлить на двѣ равныя части линѣею ik, параллельною боку cd.* (Фиг. 271.

Рѣшен. Продолживши бока *ad* и *bc*, пока пересѣкутся въ *f*, преврати четверосторонникъ *ac* въ треугольникъ *cae*; раздѣли *de* въ *h* пополамъ; между *df* и *fh* сыщи среднюю пропорціональную *fg*, сдѣлай $fi=fg$; изъ *i* проведи *ik* параллельно къ боку *cd*, которою четверосторонникъ *abcd* раздѣлится на двѣ равныя части.

Доказ. Поелику треугольникъ $cdf:\Delta chf=fd:fh$ (§ 172. *Слѣд.*); также треугольникъ $cdf:\Delta ikf$

$=fd:fh$ (§ 246); то для равенства содержаній будетъ треугольникъ $cdf:\Delta chf=\Delta caf:ikf$; но треугольникъ $cdf=\Delta cdf$, по сему треугольникъ $chf=\Delta ikf$ (*Ариѳм.* § 125), отъ коихъ отнявъ общій четвеccторонникъ $fklh$, останется треугольникъ $kcl=\Delta hli$; а придавъ къ каждому изъ нихъ четвеccторонникъ $clid$, будетъ треугольникъ $chd=kcdi=\frac{1}{2}abcd$; слѣдовательно и $abki=\frac{1}{2}abcd$.

§ 338. ЗАДАЧА. *Четвеccторонникъ abcd раздѣлить на три равныя части линѣями параллельными боку ab.* Фиг. 272.

Рѣшен. Продолживши бока ad и bc, пока пересѣкутся въ f, преврати четвеccторонникъ $abcd$ въ треугольникъ dce; раздѣли de въ g и h на три равныя части, изъ h и g проведи hc и gc, коими четвеccторонникъ $abcd$ раздѣлится на три равныя части (§ 314). Треугольникъ chd преврати въ другой lmd, чтобы онаго бокъ ml былъ параллеленъ боку ab (§ 279); такимъ же образомъ превратя треугольникъ cgf въ другой fki; то данной четвероугольникъ $abcd$ раздѣлится на три равныя части.

Доказ. Ибо треугольникъ $cfg=\Delta fki$ по рѣшенію (§ 279), отъ коихъ отнявъ четвероугольникъ $kogf$, останется треугольникъ $kco=\Delta goi$; а придавъ къ каждому изъ нихъ пятиугольникъ $abkog$, будетъ $bcga=bkia=\Delta ceg=\frac{1}{3}abcd$; также и треугольникъ $chd=lmd=\frac{1}{3}abcd$ по рѣшенію; слѣдовательно и $mlcki=\frac{1}{3}abcd$.

§ 339. ЗАДАЧА. *Отъ многоугольника afedcb отрѣзать двѣ трети.* Фиг. 273.

Рѣшен. Раздѣли бокъ ab на три равныя части, сыщи между ab и $\frac{2}{3}ab=am$, среднюю про-

порціональную an, сдѣлай $al=an$, изъ a проведи діогонали ac, ad и ae; изъ l линѣю lk параллельно къ боку be, изъ k линѣю ki параллельно къ cd, изъ i линѣю ih параллельно къ de, изъ h линѣю hg параллельно къ ef, будетъ многоугольникъ $alkihg$ требуемая часть даннаго многоугольника ac.

Доказ. Для подобія многоугольниковъ будетъ $abcdef:alkihg=ab:am$ (§ 246); но $am=\frac{2}{3}ab$, слѣдовательно и многоугольникъ $alkihg=\frac{2}{3}abcaef$.

Примѣч. Такимъ же образомъ отъ всякаго многоугольника отрѣзывается желаемая часть.

§ 340. ЗАДАЧА. *Правильной шести-угольникъ dl раздѣлить на четыре равныя части линѣями параллельными діогонали cd.* Фиг. 274.

Рѣшен. и *Доказ.* Раздѣли трапецію $abcd$, равно и трапецію $delm$ на двѣ равныя части параллельно діогонали cd (§ 337), получишь желаемое.

§ 341. ЗАДАЧА. *Правильной пяти-угольникъ $abcde$, параллельными всѣмъ бокамъ линѣями, раздѣлить на три равныя части.* Фиг. 275.

Рѣшен. Проведя изъ цетра m во всѣ углы радіусы, раздѣли mc на три равныя части въ g и i; сыщи среднюю пропорціональную ml между mc и mg, также между mc и mi среднюю mk, сдѣлай $mf=ml$ и $mh=mk$; проведи изъ f и h линѣи параллельно бокамъ cd, ed и проч., то пяти-угольникъ $abcde$ раздѣлится на три равныя части.

Доказ. Для подобія пяти-угольниковъ будетъ $abcde:fn=mc:mg$ (§ 246); но $mg=\frac{1}{3}mc$, по сему и пяти-угольникъ $fn=\frac{1}{3}abcde$; также $abcde:ho=mc:mi$ (§ 246); но $mi=\frac{2}{3}mc$, слѣд-

ственно $ho = \frac{2}{3} abcde$, по сему пяти-угольникъ $ho - fn = \frac{1}{3} abcde$.

Примѣч. Такимъ же образомъ всякой неправильной многоугольникъ раздѣлить можно на произвольное число частей, ежели вмѣсто центра возмется внутри онаго произвольно точка и проведутся изъ оной во всѣ углы линѣи, и рѣшеніе совершится какъ показано.

§ 342. ЗАДАЧА. *Многоугольникъ bvipc, изъ точки d, раздѣлить на двѣ части въ содержаніи линѣй g и h.* (Фиг. 276.

Рѣшен. Превратя многоугольникъ *bvipc* въ треугольникъ *bck* (§ 291); раздѣли *bk* въ *m* въ содержаніи линѣй *g* и *h* (§ 197); проведи *cm* и продолживши *cp*, проведи *mo* параллельно къ *cd*, и *oi* параллельно къ *dp*, точки *i* и *d* соедини прямою линѣею *di*, которая раздѣлитъ многоугольникъ *bv* въ требуемыя части.

Доказ. Треугольникъ $cdm = \Delta cao$ (§ 158. Слѣд. 2); а придавъ къ каждому изъ нихъ треугольникъ *bcd*, будетъ треугольникъ $bcm = bcod$; треугольникъ же $pdo = \Delta pdi$ (§ 158. Слѣд. 2); а придавъ къ каждому четвероугольникъ *bcpd*, будетъ многоугольнкъ $bcpid = bcod = \Delta bcm$; но $bcm : cmk = bm : mk = h : g$; треугольникъ же $bcm = bcpid$, по сему пяти-угольникъ $div = cmk$; слѣдовательно $bcpid : div = h : g$.

Примѣч. Такимъ же образомъ всякой многоугольникъ дѣлится въ данномъ содержаніи чиселъ. На прим. 4 : 9 и проч.

§ 343. ЗАДАЧА. *Многоугольникъ abfec, изъ точки n, раздѣлить на двѣ части въ содержаніи частей an и nb основанія ab.* (Фиг. 277.

Рѣшен. Проведи чрезъ точку *e* линѣю *ho* параллельно къ *ab*; преврати многоугольникъ

cf въ трапецію $aohb$ (§ 290); раздѣли ho въ точкѣ i въ пропорціональныя части, какъ ab раздѣлена въ n (§ 126); проведи il параллельно къ ne; наконецъ точки l и n соедини прямою линѣею nl, то сею линѣею, данной многоугольникъ раздѣлится въ желаемыя части.

Доказ. Треугольникъ $ano : \Delta nbh = an : nb$, и треугольникъ $oni : \Delta ihn = oi : ih$ (§ 172. *Слѣд.*) $=$ $an : nb$ по рѣшенію; по сему для равенства содержаній, треугольникъ $ano : nbh = ion : ihn = an : nb$; откуда выйдетъ слѣдующая пропорція: $ano + oin \; nbh + ihn = an : nb$ (*Ариѳм.* § 131), т. е. $anio : nbhi = an : nb$; но четвеостороникъ $neoa$ $=$ пяти угольнику $nedca$ по рѣшенію, и треугольникъ $nei = \Delta nel$ (§ 158. *Слѣд.* 2), по сему $neoa - nei = nedca - nel$, то есть четверосторонникъ $anio =$ пяти-угольнику $anldc$; а потому и $nbfel =$ четверосторонику $nbhi$, слѣдственно $anio$ или $anldc : nbhi$ или $nbfel = an : nb$.

§ 344. ЛЕММА. *Разность двухъ квадратовъ aceh и abdg равна квадрату изъ средней, между суммою и разностію боковъ тѣхъ же квадратовъ.* (Фиг. 278.

Доказ. Продолжи eh до k, такъ чтобы hk была равна ag, проведи ki параллельно къ ha; продолжи dg, пока пересѣчется съ линѣями ik и ec въ i и f; то будетъ по положенію $ah + ag = eh + hk = ek$ и $ah - ag = hg = ki$; по сему прямоугольника $ekif$ основаніе ek равно суммѣ, а высота ki равна разности боковъ двухъ квадратовъ ch и bg; прямоугольникъ же $bf = gk$, потому что $bd = ag = hk$ и $gf - dg = ah - ag = fd = hg$; а придавъ къ нимъ прямоугольникъ fh, будетъ $bf + fh = gk + fh$ равно разности двухъ квадратовъ $aceh$ и $abdg$;

но прямоугольникъ fk=квадрату kn (§ 202); слѣдовательно разность квадрата $aceh$ и $abdh$ равна квадрату kn.

§ 345. ЗАДАЧА. *Чрезъ данную точку p, лежащую между двухъ данныхъ линѣй ab и ac, провесть линѣю em, которая бы между данныхъ линѣй опредѣлила треугольникъ aem равный данному многоугольнику Q.* Фиг. 279.

Рѣшен. Данной многоугольникъ Q преврати въ параллелограммъ $agrd$ по высотѣ ph и углу cab (§ 287 и 267); сдѣлай $pi=pg$; потомъ между суммою линѣй $pg+pr$ и разностію $pr-gp=pr-pi$, то есть между gr и $ri=rk$, сыщи среднюю пропорціональную rl (§ 125); положи $dm=rl$, изъ точки m чрезъ p проведи линѣю me, то изобразится Δame равный многоугольнику Q.

Доказ. Ибо прямоугольникъ изъ суммы боковъ $gp+pr=gr$, и разности $pr-gp=rk$, равенъ разности квадратовъ изъ тѣхъ же линѣй (§ 344), то есть $gr\times rk=\overline{pr}^2-\overline{pg}^2=\overline{rl}^2=\overline{md}^2$ (§ 202); а когда къ $\overline{pr}^2-\overline{pg}^2$ и къ $\overline{md}^2$ придастся $\overline{pg}^2$, то будетъ $\overline{pr}^2=\overline{md}^2+\overline{pg}^2$ (*Ариѳм.* § 27); треугольникижъ egp, prf и fdm между собою подобны; то для того будетъ $\Delta egp:\overline{gp}^2=\Delta dfm:\overline{dm}^2=\Delta pfr:\overline{pr}^2$ (§ 173); а изъ сего произойдетъ слѣдующая пропорція: $\Delta egp+dfm:\overline{gp}^2+\overline{dm}^2=\Delta pfr:\overline{pr}^2$; но $\overline{gp}^2+\overline{dm}^2=\overline{pr}^2$ (§ 344); слѣдовательно треугольникъ $egp+\Delta dfm=\Delta pfr$ (*Ариѳм.* § 125); а придавъ къ симъ треугольникамъ пяти-угольникъ $agpfd$, будетъ треугольникъ aem=параллелограмму $agrd$= многоугольнику Q.

Примѣч. Когда линѣя pr будетъ меньше pg, то данной многоугольникъ должно превратить въ па-

раллелограммъ по высотѣ pn, и рѣшеніе сдѣлать по прежнему; естьлижъ и въ семъ случаѣ будетъ такоежъ препятствіе, то сіе значитъ, что линѣею проведенною чрезъ точку p, треугольника равнаго данному многоугольнику Q опредѣлить не можно.

§ 346. ЗАДАЧА. *Чрезъ точку p, лежащую внутри даннаго многоугольника $abcdefg$, провесть линѣю ik, которая бы отрѣзала $\frac{1}{3}$ даннаго многоугольника.* (Фиг. 280.

Рѣшен. Данной многоугольникъ $abcdefg$ превратя въ треугольникъ men, сдѣлай $ml = \frac{1}{3} mn$, проведи el, то будетъ треугольникъ $mel = \frac{1}{3}$ многоугольника $abcdefg$; продолжи ab и ef, пока пересѣкутся въ h; потомъ по прошедшей задачѣ проведи линѣю ik, такъ чтобы треугольникъ ikh былъ равенъ четвероугольнику $fgah$ сложенному съ треугольникомъ mel, тогда многоугольникъ $agfki$ будетъ требуемая часть даннаго многоугольника.

Доказ. Поелику треугольникъ ikh = четвересторону $fgah + \Delta mel$ по рѣшенію; то отнявъ отъ нихъ общій четверосторонникъ $fgah$, останется $kfgai = \Delta mel = \frac{1}{3}$ даннаго многоугольника $abcdefg$.

Примѣч. Такимъ образомъ отъ всякой прямолинѣйной плоскости отрѣзывается желаемая часть, или опредѣляется линѣею ik часть, равная данной другой какой нибудь плоскости.

§ 347. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc, изъ точки h раздѣлить на три равныя части посредствомъ размѣра Геометрическаго.* (Фиг. 281.

Рѣшен. Смѣрявъ части ch, hb основанія, и высоту al треугольника abc по размѣру, положимъ $ch = 20^\circ$, $hb = 70^\circ$, $al = 60^\circ$, то будетъ $bc = 90^\circ$ и площадь треугольника $abc = \frac{90 \times 60}{2} =$

9700°; потомъ найденную площадь треугольника *abc*, раздѣля на три равныя части, частное число 900° будетъ $=\frac{1}{3}\Delta abc$. И такъ раздѣля третью часть Δabc на половину *bh*, частное число 25°, 7′ взявъ съ размѣра и положа по перпендикуляру отъ *b* до *f*, проведи *fe* параллельно къ *bc*, а изъ *h* въ *e*, то будетъ треугольникъ $beh=\frac{1}{3}\Delta abc$. Потомъ раздѣля третью часть 900° на половину *hc*, частное число 90°, взявъ съ размѣра, положи по перпендикуляру *cd*, изъ *d* проведи *dg* параллельно къ *bc*, пока съ продолженною *ca* пересѣчется въ точкѣ *g*, изъ *g* проведи *gk* параллельно къ *ah*, точки *k* и *h* соедини прямою линѣею *kh*, получится требуемое.

Доказ. Поелику $hb=70°$ и $bf=25°, 7'$ по рѣшенію; то будетъ площадь треугольника $beh=\frac{hb\times bf}{2}=35°\times(25°, 7')=900°=\frac{1}{3}\Delta abc$. Также плоскость треугольника $hcg=\frac{cd\times ch}{2}=\frac{90\times 20}{2}=900°=\frac{1}{3}\Delta abc$; но треугольникъ $agh=\Delta ahk$ (§ 158. Слѣд. 2), и $ach+ahg=ahk+ach$, то есть треугольникъ $cgh=achk=\frac{1}{3}\Delta abc$; слѣдовательно и треугольникъ $khe=\frac{1}{3}abc$.

§ 348. ЗАДАЧА. *Каждой многоугольникъ abcde, раздѣлить посредствомъ Геометрическаго размѣра на столько частей, на сколько потребно; на прим. на три равныя части.* (Фиг. 282.

Рѣшен. и *Доказ.* Проведя въ многоугольникѣ діогонали *ac* и *ad*, и опустя на нихъ изъ *e*, *d* и *b* перпендикуляры *en*, *do* и *bp*, вымѣряй какъ діогонали *ac* и *ad*, такъ и перпендикуляры *en*, *do* и *bp* по Геометрическому размѣру; потомъ по извѣстнымъ основаніямъ *ac* и *ad* и высотамъ *en*, *do* и *bp* сыщи площадь каждаго треугольника *abc*, *acd* и *aed*, коихъ сумма будетъ означать пло-

щадь многоугольника *abcde*. Найденную площадь многоугольника *abcde* раздѣля на три равныя части, надлежитъ разсмотрѣть: ежели плоскость треугольника *abc* будетъ меньше найденной третьей части многоугольника *abcde*, то вычтя площадь треугольника *abc* изъ третьей части многоугольника *abcde*, получится число квадратныхъ мѣръ такого треугольника, которой въ число третьей части многоугольника къ треугольнику *abc* придать должно; и такъ раздѣля помянутой остатокъ на $\frac{1}{2}ac$, количество частнаго числа положи по размѣру на возставленной перпендикуляръ *cm*; изъ точки *m* проведи *mi* параллельно къ *ac*, точки *i* и *a* соедини прямою линѣею *ai*, получится треугольникъ *aic*, которой съ треугольникомъ *abc* будетъ равенъ $\frac{1}{3}abcde$. Потомъ вымѣряй по размѣру величину линѣи *ai*, и естьли должно будетъ вторую часть отрѣзать четверосторонникомъ, то раздѣля шестую часть площади многоугольника *abcde* на $\frac{1}{2}ai$, частное число положи по размѣру на возставленной перпендикуляръ *ig*, и проведя *gh* параллельно къ *ai*, проведи *ah*, то получится треугольникъ $ahi=\frac{1}{6}abcde$; напослѣдокъ вымѣрявъ по размѣру величину линѣи *ah*, раздѣли шестую часть многоугольника *abcde* на $\frac{1}{2}ah$, частное число положи по размѣру на возстановленной перпендикуляръ *al*, и проведи изъ точки *l* линѣю *lk* параллельно къ *ah*, точки *k* и *h* соедини прямою линѣею *kh*, то получится треугольникъ $akh=\frac{1}{6}abcde$; по сему треугольникъ $aih+\Delta akh=\frac{2}{6}abcde=\frac{1}{3}abcde$; слѣдовательно и оставшійся четверосторонникъ $edhk=\frac{1}{3}$ многоугольн. *abcde*.

Положимъ, что по размѣру нашлось $ad=120'$, $ac=100'$, $en=30'$, $do=68'$ $bp=40'$, то будетъ
площадь $\Delta aed=\frac{ad\times en}{2}=\frac{120'\times 30'}{2}=1800'$
площадь $\Delta adc=\frac{ac\times od}{2}=\frac{100'\times 68'}{2}=3400'$
площадь $\Delta acb=\frac{ac\times bp}{2}=\frac{100'\times 40'}{2}=2000'$

площадь всего многоуг. $abcde=7200'$ = суммѣ треугольниковъ; по сему $\frac{7200}{3}=2400'=\frac{1}{3}abcde$.
$\frac{1}{3}abcde-\Delta abc=2400'-2000'=400'=\Delta aic$. $\frac{400}{50}=8'$ = перпендик. *ст.*
$2000''+400'=2400'=\Delta aic+acb=\frac{1}{3}abcde=abci$. $\frac{2400}{2}=1200'=\frac{1}{6}abcde$.
$ai=80'$, $\frac{80}{2}=40'=\frac{1}{2}ai$.
$\frac{1200}{40}=30'$ = перпендик. ig. $ah=90'$, и $\frac{90}{2}=45'=\frac{1}{2}ah$; по сему $\frac{1200}{45}=26'$. 6 = перпендик. al.
$1200+1200'=2400'=\Delta aih+akh$ = четвероуг. $abci=akhi$.
$2400+2400'=4800'$ = четвероугольник. $abci+akhi=\frac{2}{3}abcde$
$7200-4800'=2400'=abcde-abchk=kcdh$.

Примѣч. Сія задача весьма полезна въ Геодезіи при раздѣленіи полей на желаемое число частей.

О положеніяхъ плоскостей.

Теперь надлежитъ намъ разсмотрѣть относительныя къ тѣламъ обстоятельства, при коихъ разсматриваются различныя положенія прямыхъ линѣй въ разсужденіи плоскостей, и разныя положенія плоскостей въ разсужденіи ихъ соединенія съ другими.

§ 349. ТЕОРЕМА. *Когда двѣ точки* C *и* H *прямой линѣи* CH *лежатъ на плоскости* DE, *то и вся линѣя* HC *совершенно лежитъ на той же плоскости* (*фиг.* 283). Ибо всякая плоскость про-

исходитъ отъ движенія прямой линѣи (§ 8); слѣдовательно прямая линѣя HC, положенная на плоскость DE, всѣми своими частями совершенно лежитъ на сей плоскости.

§ 350. ТЕОРЕМА. *Положеніе плоскости* CBF *опредѣляется тремя точками* B, C *и* F *лежащими не въ прямой линѣи.* Ибо удобно разумѣть можно, что плоскость BCF положена будучи на три точки B, C и F, непремѣнно на нихъ опереться должна. *Фиг.* 285.

§ 351. ТЕОРЕМА. *Двѣ прямыя линѣи* HC *и* GF, *пересѣкающіяся въ одной точкѣ* B, *находятся въ одной плоскости* DE. Поелику когда одна прямяя линѣя HC съ точкою сѣченія B лежитъ на плоскости DE, то и другая GF, положенная на ту же плоскость, всѣми своими частями коснется плоскости DE, и слѣдовательно пересѣкается съ первою линѣею HC въ точкѣ B, въ одной плоскости DE. *Фиг.* 283.

§ 352. *Опредѣл. Линѣя* AB *перпендикулярная къ плоскости* DE есть та, которая упадаетъ на плоскость DE такъ, что со всѣми линѣями BC, BF, BH и BG, чрезъ точку B по плоскости DE проведенными, дѣлаетъ углы ABC, ABF, ABH и проч. прямые (*фиг.* 283). Изъ сего удобно разумѣть можно, что изъ точки A, больше одного перпендикуляра AB, къ плоскости DE провесть не можно.

§ 353. ТЕОРЕМА. *Ежели плоскость* CF *пересѣчется другою плоскостію* GH, *то взаимное ихъ сѣченіе* AB *есть прямая линѣя* (*фиг.* 284). Потому что линѣя AB, чрезъ двѣ точки A и B сѣченія плоскостей проведенная есть прямая, какъ по плоскости CF, такъ и по плоскости GH проходящая (§ 349); и притомъ толщина

каждой плоскости CF и GH ничто иное, какъ только одна прямая линѣя (§ 8); слѣдовательно и общее сѣченіе двухъ плоскостей есть прямая линѣя AB.

Изъ сего видно, что чрезъ ту же линѣю AB сѣченія, безконечное число плоскостей пройти можетъ.

§ 354. ТЕОРЕМА. *Ежели изъ точки A, прямой линѣи AF, наклоненной къ плоскости GE, опустится перпендикуляръ AB на плоскость GE, точки B и F перпендикулярной AB и наклоненной AF соединятся прямою линѣею BF, и къ сей линѣи проведется перпендикулярная CD по плоскости GE, то AF будетъ перпендикулярна къ CD* (*фиг.* 285). Положивъ отъ точки F равныя части FC и FD, проведемъ линѣи BC и BD то сіи линѣи будутъ равны между собою (§ 26); также будетъ треугольникъ ABC =ΔABD, потому что уголъ ABC=ABD прямые (§ 352), бокъ BC=BD и бокъ AB есть общій, по сему AC=AD (§ 26), треугольникъ же ADF=ΔAFC; ибо DF=FC, AD=AC и уголъ ADF=∠ACF (§ 28), по сему и уголъ AFD=AFC (§ 26); слѣдов. AF перпендикулярна къ DC.

§ 355. *Опредѣл. Плоскость* BF *перпендикулярная къ плоскости* DE есть та, къ которой всякая линѣя LI, MK, NI и PK по плоскости DE проведенныя, будутъ перпендикулярны (*фиг.* 286); и слѣдовательно перпендикулярная плоскость BF упадаетъ на плоскость DE, не наклоняясь ни на одну, ни на другую сторону.

Слѣдств. I. Изъ сего явствуетъ, что на одной и той же линѣи AB, проведенной по плоскости DE, не можно поставить больше одной плоскости перпендикулярной къ плоскости DE.

Слѣдств. II. Ежели изъ какой нибудь точки I, взятой на линѣи AB общаго сѣченія, проведутся линѣи GI и IH, то каждая изъ нихъ будетъ перпендикулярна къ линѣи IL проведенной по плоскости DE; ибо когда линѣя IE перпендикулярна къ плоскости BF, то оная будетъ перпендикулярна и ко всѣмъ линѣямъ чрезъ точку I, по плоскости BF проведеннымъ (§ 352).

Слѣдств. III. Ежели изъ точки G или H, взятой на плоскости BF, перпендикулярной къ плоскости DE, проведется перпендикулярная HK къ общему сѣченію AB, то сія линѣя будетъ перпендикулярна къ плоскости DE; потому что она съ проведенною KM составитъ уголъ прямой.

Слѣдств. IV. Когда на плоскости DE, изъ точки K возставленный перпендикуляръ KH, пройдетъ по плоскости BF, то сія плоскость будетъ перпендикулярна къ плоскости DE. Изъ сего видно, что двѣ линѣи HK и GI, перпендикулярныя къ плоскости DF, будутъ параллельны; ибо ежели точки I и K соединятся линѣею IK, то какъ линѣя KH, такъ и GI съ линѣею KI будутъ находиться въ одной плоскости BF и перпендикулярны къ той же линѣи KI; и слѣдовательно параллельны между собою (§ 43. *Слѣд.* 2).

§ 356. ТЕОРЕМА. *Ежели двѣ плоскости* CF *и* GH *перпендикулярныя къ третьей* DE, *взаимно пересѣкутся, то общее ихъ сѣченіе* AB *также будетъ перпендикулярно къ плоскости* DE (*фиг.* 284). Ибо перпендикуляръ, возставленный изъ точки A на плоскости DE, будетъ находить-

ся какъ въ плоскости CF, такъ и въ плоскости GH (§ 355. *Слѣд.* 3), и слѣдовательно не можетъ быть другаго общаго сѣченія, кромѣ сей перпендикулярной линѣи AB.

§ 357. *Опредѣл.* Ежели плоскость BD пересѣчется другою плоскостію BC, то взаимное ихъ наклоненіе называется *Уголъ плоскостей*, или *Уголъ наклоненія плоскостей.* (Фиг. 287.

§ 358. ТЕОРЕМА. *Уголъ изъ плоскостей* BD *и* BC *измѣряется угломъ* GEF, *составленнымъ изъ двухъ линѣй* EG *и* EF, *проведенныхъ по обѣимъ плоскостямъ перпендикулярно къ общему ихъ сѣченію* AB, *въ одну точку* E (*фиг.* 287). Ибо ежели представимъ себѣ, что плоскость BC положена на другую плоскость BD, и не отдѣляя одного своего конца AB отъ общаго сѣченія, начнетъ другимъ подыматься; то точка F на линѣи EF взятая, находясь сначала въ точкѣ G плоскости BD, будетъ описывать дугу GxF, которая есть мѣра угла GEF, составленнаго изъ линѣй GE и EF (§ 14), и слѣдовательно мѣра угла составленнаго изъ плоскостей BD и BC.

Слѣдств. I. Изъ сего удобно можно видѣть, что ежели одна плоскость BC упадетъ на другую GH (*фиг.* 284), то сумма двухъ угловъ GBC и CBH изъ плоскостей, равна 180 град.

Слѣдств. II. Сумма угловъ GBC, CBH, HBE и GAF, составленныхъ изъ нѣсколькихъ плоскостей, пересѣкающихся въ одной прямой линѣи AB, равна 360 град.

Слѣдств. III. Два противуположенные угла GAF и CBH изъ плоскостей равны между собою.

§ 359. *Опредѣл. Плоскости* EF и GH *парал-*

лельныя или *равноотстоящія* суть тѣ, кои будучи продолжены въ обѣ стороны, никогда одна съ другою сойтиться не могутъ. *Фиг.* 288.

§ 360. ТЕОРЕМА. *Когда двѣ параллельныя плоскости EF и GH пересѣкутся третіею плоскостію ABDC, то сѣченія ихъ AB и CD будутъ двѣ прямыя линѣи параллельныя между собою (фиг. 288).* Ибо каждая изъ сихъ линѣй находится на параллельныхъ плоскостяхъ, и слѣдовательно линѣи AB и CD будучи продолжены въ обѣ стороны, никогда сойтиться не могутъ; а въ противномъ случаѣ, и плоскости, на коихъ онѣ находятся, будучи продолжены, сойдутся вмѣстѣ, и потому не будутъ параллельны.

§ 361. ТЕОРЕМА. *Когда двѣ или нѣсколько параллельныхъ плоскостей* (фиг. 288) *пересѣкутся одною плоскостію, то углы въ одну сторону лежащіе и углы на крестъ, между параллельныхъ плоскостей, будутъ равны между собою; также сумма двухъ угловъ находящихся внутри двухъ параллельныхъ плоскостей, равна двумъ прямымъ угламъ. И обратно, когда двѣ плоскости пересѣкутся третіею, такъ что углы на крестъ или въ одну сторону лежащіе будутъ равны, то оныя плоскости будутъ париллельны.* Ибо углы отъ наклоненія плоскостей происходящіе, тѣ же самыя имѣютъ свойства, какъ и углы составляющіеся изъ линѣи § 158 и Слѣдствія.

§ 362. ТЕОРЕМА. *Ежели къ одной изъ двухъ параллельныхъ плоскостей, линѣя BD перпендикулярна, то оная будетъ перпендикулярна и къ другой плоскости.* Фиг. 288.

Положимъ, что линѣя BD перпендикулярна къ плоскости EF, то оная будетъ перпендикулярна къ линѣи CD, на той же плоскости

проведенной (§ 352); но плоскость GH параллельна къ плоскости EF, по сему линѣя AB параллельна къ CD, и уголь CDB+DBA=180° (§ 43. *Слѣд.* 3); но уголь CDB=90°, по сему уголь DBA=90°; слѣдовательно линѣя DB перпендикулярна къ линѣи BA и къ плоскости GH (§ 352).

ОТДѢЛЕНІЕ ТРЕТІЕ.

О названіяхъ Геометрическихъ тѣлъ.

§ 363. *Опредѣл.* *Тѣломъ Геометрическимъ* называется всякое пространство, имѣющее три протяженія или измѣренія въ *длину*, *ширину* и *высоту*. *Наружности* тѣла суть плоскія или кривыя поверхности, окружающія оное.

§ 364. *Опредѣл.* Тѣло, у котораго двѣ противулежащія стороны HEG и DCF, суть двѣ равныя и параллельныя плоскости; и всѣ другія плоскости, составляющія стороны, суть параллелограммы, называется вообще *Призма*. Смотр. *фиг.* 289, 290, 291 и 292.

Прибавл. Всякую призму можно вообразить происходящею отъ движенія какой нибудь плоскости DCF, самой себѣ параллельно, по прямой линѣи AB стоящей на той же плоскости. *Фиг.* 289, 290, 291 и 292.

Каждая изъ двухъ параллельныхъ плоскостей HEG и DCF, называется *основаніе Призмы.*

§ 365. *Опредѣл.* Призмы названіе свое получаютъ отъ числа боковъ своего основанія. *На прим.* Когда основаніе призмы будетъ треугольникъ HGE, тогда призма называется *Трехсторонная* (*фиг.* 289); а ежели основаніе

призмы будетъ четверосторонникъ HEG, то призма называется *Четверосторонная* (*фиг.* 290 и 292), и такъ далѣе (*фиг.* 291).

Прибавл. Ежели основаніе HEG четверосторонной призмы будетъ прямоугольникъ, то такая призма именуется *Параллелопипедъ* (*фиг.* 290). Ежели всѣ стороны составляющія поверхность четверосторонной призмы, будутъ квадраты, то такое тѣло именуется *Кубъ* (*фиг.* 292).

§ 366. *Опредѣл.* Линѣи HD, EC и проч., изъ коихъ каждая есть соединеніе двухъ параллелограммовъ, называется *Ребро призмы* (*фиг.* 289, 290, 291 и 292) Ежели ребра призмы будутъ перпендикулярны къ основаніямъ, тогда такія призмы именуются *Прямыя*, и бока ихъ составляющія поверхность будутъ прямоугольники (*фиг.* 289, 290 и 292); а въ противномъ случаѣ, призмы называются *Наклоненныя* или *Косыя* (*фиг.* 291).

§ 367. *Опредѣл.* Линѣя BA, опущенная изъ произвольно взятой точки верхняго основанія перпендикулярно къ плоскости нижняго основанія, называется *Высота призмы* (*фиг.* 289, 290, 291 и 292). Изъ сего видно, что всякое ребро HD, EC и проч. прямой призмы равно высотѣ AB.

§ 368. *Опредѣл.* *Цилиндръ* DE есть тѣло (*фиг.* 293), заключающееся между двухъ равныхъ и параллельныхъ круговъ HE и DGF, и кривой поверхности, раждающейся отъ движенія прямой линѣи HD, концами H и D, около окружностей обѣихъ круговъ. Линѣя AB, со-

единяющая центры B и A обѣихъ круговъ (кои *Основаніями* именуются), называется *Ось цилиндра.* Ежели ось AB цилиндра DE будетъ перпендикулярна къ плоскости верхняго или нижняго круга, тогда цилиндръ называется *прямой;* естьли же ось AB будетъ не перпендикулярна къ плоскости основанія, тогда цилиндръ именуется *Наклоненной* или *Косой* (*фиг.* 294).

Прибавл. Прямой цилиндръ происходитъ и отъ обращенія прямоугольника ABEF, около одного своего бока AB за ось взятаго; ибо отъ параллельныхъ и равныхъ линѣй AF и BE произойдутъ равные и параллельные круги, а отъ линѣи EF, кривая поверхность онаго (*фиг.* 293).

§ 369. *Опредѣл. Высота цилиндра* есть линѣя AB, перпендикулярно къ обѣимъ плоскостямъ проведенная, на коихъ основанія HE и DFG находятся (*фиг.* 293 и 294).

§ 370. *Опредѣл. Пирамида* есть тѣло ACBE, окруженное нѣкоторымъ числомъ плоскостей, изъ коихъ одна, называющаяся *Основаніемъ*, есть какой нибудь многоугольникъ ABC, а прочія суть треугольники, у коихъ основанія суть бока многоугольника ABC, и всѣ верхи ихъ соединяются въ одну точку E. Точка E именуется *Верхъ пирамиды* (*фиг.* 295, 296 и 297).

Прибавл. Пирамиду можно себѣ представить раждающеюся отъ движенія какой нибудь плоскости ABC, вверхъ самой себѣ параллельно по прямой линѣи ED, стоящей на той же плоскости, уменьшая свои бока AC и проч. въ Ариѳметической прогрессіи до тѣхъ поръ, пока послѣдняя плоскость сдѣлается точкою E.

§ 371. *Опредѣл.* Пирамиды названiе свое получаютъ отъ числа боковъ основанiя; *на прим.* ежели основанiе пирамиды будетъ треугольникъ АВС, то пирамида называется *Трехсторонная* (*фиг.* 295). Естьли же основанiе АВС пирамиды АСВЕ будетъ четвеׁросторонникъ, то пирамида называется *Четверосторонная* (*фиг.* 296), и такъ далѣе (*фиг.* 297).

§ 372. *Опредѣл. Высота пирамиды* есть линѣя ED, перпендикулярно упадающая изъ верха Е на основанiе АВС (*фиг.* 295 и 296); или линѣя EF, опущенная перпендикулярно изъ верха Е на ту плоскость, на которой лежитъ основанiе АВС (*фиг.* 297).

§ 373. *Опредѣл. Прямая* или *Прямостоящая пирамида* есть та, у которой изъ верха Е опущенной перпендикуляръ ED, упадаетъ въ центръ D правильнаго многоугольника АВС, служащаго основанiемъ пирамиды (*фиг.* 295 и 296); въ противномъ же слѣчаѣ, пирамида называется *Наклоненная* или *Косая* (*фиг.* 297).

Слѣдств. Изъ сего удобно видѣть можно, что у прямостоящихъ пирамидъ (*фиг.* 295 и 296), всѣ треугольники, соединяющiеся верхами своими въ точкѣ Е, суть равны и равнобедренны; ибо основанiя ихъ равны и бока АЕ, ЕС, ЕВ и проч. всѣ равны; потому что треугольники ADE, EDC, EDB и проч., составленные изъ радiусовъ AD, DC, DB и проч. и общаго перпендикуляра ED, суть равны между собою (§ 26).

§ 374. *Опредѣл. Конусъ* есть тѣло AFBC (*фиг.* 298 и 299), составленное изъ плоскости

круга AFBE, которой называется *Основаніе конуса*, и кривой поверхности, происходящей отъ обращенія прямой линѣи CA, которая обходя окружность основанія, пребываетъ однимъ своимъ концемъ въ неподвижной точкѣ C. Точка C именуется *Верхъ Конуса.*

§ 375. *Опредѣл. Высота Конуса* есть перпендикуляръ CD или CH (*фиг.* 298 и 299), изъ верха C на плоскость основанія опущенной. Ежели перпендикуляръ CD проходитъ чрезъ центръ D основанія, то конусъ называется *Прямой* (*фиг.* 298); а въ противномъ случаѣ именуется конусъ *Наклоненной* или *Косой* (*фиг.* 299). Линѣя CD именуется также и *Осью Конуса.*

Прибавл. Прямой конусъ AFBC происходитъ также и отъ обращенія прямоугольнаго треугольника ACD, около одного своего перпендикулярнаго бока CD за ось взятаго; ибо тогда линѣя AD произведетъ кругъ AFBE, а бокъ CA кривую поверхность онаго (*фиг.* 298).

Примѣч. Ежели какое нибудь изъ предписанныхъ тѣлъ разрѣжется плоскостію параллельною къ основанію, то плоскости сихъ разрѣзовъ MN, въ призмахъ и цилиндрахъ, будутъ совершенно равны своимъ основаніямъ (*фиг.* 289 до 294); а въ пирамидахъ и конусахъ, плоскости разрѣзовъ QL, будутъ подобны ихъ основаніямъ. *Фиг.* 295 до 299й.

§ 376. *Опредѣл.* Ежели верхняя часть пирамиды ADCN (*фиг.* 300), отрѣжется плоскостію EHGF параллельною къ основанію ABCD, то оставшаяся часть AEFGCD сего тѣла, называется *Отрѣзная пирамида.* Изъ сего видно, что отрѣзная пирамида есть тѣло, окружающееся двумя параллельными и подобными мно-

тоугольниками ABCD и EFGH (кои *Основаніями* именуются), и толикимъ числомъ трапецій, сколько каждое основаніе боковъ имѣетъ.

§ 377. *Опредѣл. Отрѣзной конусъ* есть тѣло AEBDC (*фиг.* 301), раждающееся отъ обращенія прямоугольной трапеціи ACKI, около одного своего перпендикулярнаго бока IK за ось взятаго; причемъ двѣ неравныя параллельныя линѣи AI и CK произведутъ круги, *Основаніями* называющіеся, а наклоненная линѣя AC, кривую поверхность онаго.

Отрѣзныя пирамиды и конусы бываютъ также прямыя и наклоненныя, въ разсужденіи тѣхъ же самыхъ причинъ, о коихъ говорено было въ § 373 и 375.

§ 378. *Опредѣл. Шаръ* или *Сфера* есть тѣло ACBD (*фиг.* 302), происходящее отъ обращенія полукруга ADB около своего діаметра AB. Діаметръ AB называется *Ось*, а концы онаго, то есть точки A и B, *Полюсами шара* именуются.

Прибавл. Слѣдовательно шаръ есть тѣло окруженное такою выпуклою поверхностію, у которой всѣ точки, отъ внутренней точки O (именуемой *Центромъ шара*), въ равномъ разстояніи находятся. Изъ того же видно, что всѣ разрѣзы, или сѣченія шара суть круги.

Ежели плоскость пройдетъ чрезъ центръ шара, то сѣченіе называется *большой кругъ шара*; а всѣ другія сѣченія шара, плоскостьми не чрезъ центръ его проходящими, называются *меньшими кругами*.

§ 379. *Опредѣл. Вырѣзокъ* или *Секторъ шара*

есть тѣло AECF (*фиг.* 303), происходящее отъ обращенія вырѣзка круга CAF около одного своего бока AC за ось взятаго.

§ 380. *Опредѣл. Отрѣзокъ шара* есть тѣло AFGE (*фиг.* 304), происходящее отъ обращенія полуотрѣзка круга AGE около своего перпендикуляра AG, стоящаго на срединѣ хорды EF.

§ 381. *Опредѣл.* Часть поверхности шара, находящаяся между двухъ параллельныхъ круговъ AB и CD, называется *Зона* или *Поясъ*. *Фиг.* 305.

Примѣч. Поелику тѣла произходятъ или отъ обращенія плоскости около одного своего бока за ось взятаго, или отъ движенія какой нибудь плоскости по прямой линѣи; то изъ того явствуетъ: 1) Что при обращеніи плоскости, всякая перпендикулярная линѣя, изъ каждой точки оси по плоскости проведенная, опишетъ кругъ, коихъ число будетъ равно числу точекъ, неподвижной бокъ или ось составляющихъ, или числу линѣй составляющихъ поверхность вращающейся плоскости. 2) Движимая плоскость подымаясь вверхъ по прямой линѣи, оставитъ столько касающихся между собою слѣдовъ, или безконечно тонкихъ слоевъ, сколько точекъ линѣя, по которой плоскость движется, имѣть будетъ; слѣдовательно всякое тѣло почитать можно составленнымъ изъ безконечнаго числа плоскостей, или безмѣрно тонкихъ слоевъ.

§ 382. *Опредѣл.* Ежели нѣсколько плоскихъ угловъ ACB, ACD и BCD (*фиг.* 306) боками своими соединяются такъ, что верхи ихъ будутъ находиться въ одной точкѣ C, возвышенной надъ плоскостію ABD, то произшедшая отъ того острота называется *Уголъ тѣла*.

Слѣдств. I. Изъ сего явствуетъ, что два

плоскіе угла CAB и BAD тѣлеснаго угла составить не могутъ, потому что другъ на друга упасть должны; слѣдовательно для составленія тѣлеснаго угла не меньше трехъ плоскихъ угловъ потребно, изъ коихъ сумма двухъ какихъ нибудь угловъ больше третьяго быть должна; ибо два угла ACB и ACD вмѣстѣ взятые, должны составить угловатую поверхность DCBAD, слѣдственно оные должны быть больше третьяго DAB.

Слѣдств. II. Изъ тогожъ видно, что тѣлесной уголъ измѣряется суммою градусовъ плоскихъ угловъ, составляющихъ оной уголъ, и что сумма плоскихъ угловъ, составляющихъ уголъ тѣла, должна быть меньше 360 град.; ибо ежели сумма плоскихъ угловъ будетъ рав. 360°, то они всѣ вмѣстѣ будутъ находиться на одной плоскости и слѣдственно не могутъ составить угловатой поверхности съ возвышенною остротою.

§ 383. ТЕОРЕМА. *Всякое тѣло, ограниченное плоскостьми меньше четырехъ плоскихъ сторонъ имѣть не можетъ.* (Фиг. 306.

Доказ. Ибо для составленія каждаго угла тѣла требуется не меньше какъ три плоскихъ угла ACD, ACB и BCD; но въ тѣлесномъ углѣ C такъ составленномъ, останется внутри его пустота; слѣдовательно для закрытія оной по крайней мѣрѣ еще одна плоскость ABD потребна.

§ 384. *Опредѣл. Правильное тѣло* есть то, которое окружается равными и правильными плоскостьми и имѣетъ всѣ тѣлесные углы равные; въ противномъ же случаѣ называется *неправильнымъ.*

§ 385. *Опредѣл.* Правильныхъ тѣлъ суть пять: 1е. *Тетраедръ* или *Четвероgranникъ* ABDC (*фиг.* 306) есть трехсторонная пирамида, ограниченная четырмя равными равносторонними треугольниками. 2е. *Кубъ* есть правильное тѣло HDCE (*фиг.* 292), окружающееся шестью равными квадратами. 3е. *Октаедръ* или *осьмигранникъ* есть тѣло ABCDE (*фиг.* 307), окруженною 8ю равными равносторонними треугольниками. 4е. *Додекаедръ* или *двѣнадцатигранникъ* есть тѣло ARG (*фиг.* 308), окруженное 12ю равными правильными пяти-угольниками. 5е. *Икосаедръ* или *двадцатигранникъ* есть правильное тѣло BAFEC (*фиг.* 309), опредѣленное 20ю равными треугольниками.

Примѣч. Поелику всѣ стороны каждаго изъ правильныхъ тѣлъ суть равныя и правильныя многоугольники; слѣдовательно всякое изъ сихъ тѣлъ впишется въ шарѣ такимъ образомъ, что всѣ ихъ углы коснутся поверхности шара, и центръ каждаго соединится съ центромъ шара.

О начертаніи поверхностей тѣлъ и о составленіи оныхъ изъ бумаги.

§ 386. ЗАДАЧА. ***По данной высотѣ AB и боку BC основанія, начертить поверхность пятисторонной призмы*** Фиг. 310.

Рѣшен. Проведя линѣю AE равную суммѣ боковъ основанія призмы, изъ точекъ A и E поставь перпендикуляры AB и ED равные данной высотѣ AB, проведи BD; потомъ раздѣля AE на пять равныхъ частей въ H, I, K и L, проведи HC, IM, KN, LO параллельно къ AB; сдѣ-

лай на IK и NM правильные пяти-угольники KF и MG (§ 113), тогда изобразится требуемая поверхность призмы.

Примѣч. Такимъ же образомъ начертится поверхность всякой призмы, когда на произвольно проведенной линѣи AE положится данной бокъ основанія столько разъ, сколько призма боковъ въ основаніи имѣть должна, и высота опредѣлится равная высотѣ призмы.

§ 387. ЗАДАЧА. *По данной высотѣ AB, длинѣ CD и широтѣ EF основанія параллепипеда, начертить поверхность онаго.* Фиг. 311.

Рѣшен. На произвольно проведенной линѣи GH, положи GS = CD, SF = EF, FO = GS, OH = SF; изъ точекъ G и H поставя перпендикуляры GI и HN равные высотѣ AB, проведи IN; потомъ проведи линѣи SK, FL и OM параллельно къ GI; сдѣлай на FO и LM прямоугольники FQ и LR, коихъ бы высоты были равны EF, получишь требуемую поверхность.

§ 388. ЗАДАЧА. *По данной высотѣ GH, и діаметру IK основанія прямаго цилиндра, начертить поверхность онаго.* Фиг. 312.

Рѣшен. Раздѣля діаметръ IK на 113 равныхъ частей, проведи линѣю AB равную 355 такимъ же частямъ; изъ точекъ A и B поставя перпендикуляры AC и BD равные данной высотѣ GH, проведи CD; на продолженной AC и BD сдѣлай CF и BE равные діаметру IK; наконецъ раздѣля оныя пополамъ, опиши круги, получишь требуемую поверхность цилиндра.

Доказ. Поелику AB равна окружности круга діаметра IK; по сему согнувъ параллелограммъ AD, чтобы бокъ AC соединился съ бокомъ BD, то линѣя AB сдѣлается окружно-

стію основанія цилиндра: слѣдственно параллелограммъ AD составитъ наружную поверхность цилиндра.

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, что поверхность цилиндра равна параллелограмму, коего высота равна высотѣ, а основаніе равно окружности основанія цилиндра.

§ 389. ЗАДАЧА. *По данному наклоненному боку* AB, *и боку* CD *основанія прямой трехсторонной пирамиды, начертить поверхность оной.* Фиг. 313.

Рѣшен. Изъ произвольно взятой на бумагѣ точки E, радіусомъ EF, равнымъ данному боку AB, опиши неопредѣленную дугу FK, положи по оной бокъ основанія CD три раза въ G H и K, проведи FG, GH и HK; наконецъ сдѣлай на GH равносторонній треугольникъ GHI, получишь требуемое.

Примѣч. Такимъ образомъ поверхность всякой пирамиды чертить надлежитъ, наблюдая только то, чтобы по дугѣ данной бокъ основанія полагать столько разъ, сколько пирамида въ основаніи боковъ имѣетъ.

§ 390. ЗАДАЧА. *По данному наклоненному боку* AB *и діаметру* CD *круга: начертить поверхность прямаго конуса.* Фиг. 314.

Рѣшен. Изъ точки B, раствореніемъ косаго бока BA, опиши неопредѣленную дугу AC, раздѣли діаметръ CD на 113, или на 7 равныхъ частей; потомъ по дугѣ AC положивъ таковыхъ 355 или 22 части, проведи BC; на продолженной BA сдѣлавъ AD равную діаметру CD, опиши кругъ; получишь требуемую поверхность конуса.

Доказ. Поелику дуга AC равна окружности круга AED (§ 234. *Приб.* 1); по сему согнувъ

вырѣзокъ ABC такъ, чтобы бокъ BC соединился съ бокомъ AB, то дуга AC непремѣнно обойдетъ окружность круга AED, слѣдовательно составитъ наружную поверхность конуса.

§ 391. ЗАДАЧА. *По данному наклоненному боку* MN, *и бокамъ* OP *и* QR *верхняго и нижняго основанія, начертить поверхность прямой трехсторонной отрѣзной пирамиды.* (Фиг. 315.

Рѣшен. Изъ трехъ линѣй MN, OP и QR начертя трапецію ACDB (§ 93. *Слѣд.*), продолжа бока AC и BD до E; изъ точки E радіусомъ EA опиши произвольной величины дугу ABHL, а радіусомъ EC дугу CDIK; положи по дугѣ LA бокъ AB въ точкахъ H и L, а по дугѣ CK бокъ CD въ точкахъ I и K два раза; проведи BH, HL, DI, KI; наконецъ начерти на BH и DI равносторонные треугольники GBH и IDF, получишь желаемое.

Примѣч. Такимъ образомъ поверхность всякой отрѣзной пирамиды чертить надлежитъ, наблюдая только то, чтобъ по дугѣ CK и AL данной бокъ верхняго и нижняго основанія, положенъ былъ столько разъ, сколько пирамида въ основаніи боковъ имѣть должна.

§ 392. ЗАДАЧА. *По данному боку* AB, *и діаметрамъ* IK *и* OD *верхняго и нижняго круговъ, начертить поверхность прямаго отрѣзнаго конуса.* (Фиг. 316.

Рѣшен. По тремъ линѣямъ OD, IK и AB, начерти трапецію HF такъ, чтобы оной основаніе EH равно было OD, CF=IK, и EF=AB=HC (§ 93. *Слѣд.*); продолжи EF и HC до P; изъ точки P радіусомъ PE опиши неопредѣленную дугу EM; потомъ раздѣля діаметръ OD на 113 или 7 равныхъ частей, положи по дугѣ EM таковыхъ же 355 или 22 части, проведи PM;

наконецъ изъ P радіусомъ PF описавъ дугу FCL, продолжи LM, сдѣлай MG=OD и EN=IK, и раздѣля оныя пополамъ, опиши круги MQG и LNR, то плоскость EMLF будетъ поверхность отрѣзнаго конуса.

Доказ. Изъ точки P, на основаніе EH трапеціи EC, опустя перпендикуляръ PS, вообразимъ себѣ, что прямоугольной треугольникъ HPS вообще съ трапеціею CTSH, сдѣлаетъ цѣлое обращеніе около перпендикулярнаго своего бока PTS, отъ чего произойдетъ цѣлой EHP и отрѣзной конусъ EHCF; и для подобія треугольниковъ PFC и PEH, будетъ PF:PE=FC:EH (§ 117); но PF:PE=FCL:EHM (§ 152. *Слѣд.* 2), по сему FC:EH=FCL:EHM (*Ариѳм.* § 113). Теперь положивъ окружность круга діаметра EC =y, а окружность круга діаметра EH=x, будетъ FC:EH=y:x (§ 152. *Слѣд.* 1), и для равенства содержаній, будетъ FCL:EHM=y:x; но EHM=x по положенію; слѣдовательно FCL =y равно окружности діаметра FC (*Ариѳм.* § 125); по сему ежели согнется поверхность FEML, такъ чтобы бокъ LM соединился съ бокомъ EF, то дуга FCL сдѣлается окружностію круга NRL, а дуга EHM окружностію круга MQG, и чрезъ то составится поверхность отрѣзнаго конуса.

§ 393. ЗАДАЧА. *По данному боку AB начертить поверхность тетраедра.* Фиг. 317.

Рѣшен. Положивъ на продолженной AB линѣю AC=AB, начерти на линѣи BC равносторонній треугольникъ CBE; потомъ проведи AD параллельно къ CE, DF параллельно BC, и проведи AF, то получишь желаемое.

§ 304. ЗАДАЧА. *По данному боку* AB, *начертить поверхность куба.* Фиг. 318.

Рѣшен. Продолживши данной бокъ AB до P, чтобы AP равна была четыремъ AB, поставь изъ точекъ A, B, C, D и P перпендикуляры каждой равенъ AB, и проведи FG; начерти на CD и HI квадраты CN и KI, получишь требуемое.

§ 305. ЗАДАЧА. *По данному боку* BC, *начертить поверхность октаедра.* Фиг. 319.

Рѣшен. Продолживши данной бокъ BC въ обѣ стороны сдѣлай AB и CF равные BC; начерти на AC и BF равносторонные треугольники ACG и BFH; продолжи GC до D, HB до I; и проведя BE параллельно къ AG, DK параллельно BF, проведи IE и CK, получишь желаемое.

§ 306. ЗАДАЧА. *По данному боку* AB, *начертить поверхность додекаедра.* Фиг. 320.

Рѣшен. Начертя на данной AB правильной пяти-угольникъ ABCDE (§ 113), продолжи діогонали онаго AD, AC, EC, EB и DB, сдѣлай CX, AZ, DF, AT, CQ, EU, BR, EV, BL и DK каждую равно AB, раствореніемъ оной изъ K, U, T, R и X опиши дуги *y*, а изъ V, Z, L, Q и F тѣмъ же раствореніемъ пересѣки дуги *y*; проведи линѣи KI, IV, U*y*, *y*Z, T*y*, *y*L, R*y*, *y*Q, X*y*, *y*F, то изобразится половина поверхности додекаедра. Потомъ продолжи EI до P и EK до G каждую равно AB: раствореніемъ оной изъ P и G сдѣлай равнобедренной треугольникъ PNG, отъ чего произойдетъ правильной пяти-угольникъ PNK; на линѣи PN начерти правильной пяти-угольникъ PNH; а потомъ около сего пяти-угольника начерти, какъ и прежде, другую половину поверхности, получишь желаемое.

§ 397. ЗАДАЧА. *По данному боку* AB, *начертить поверхность икосаедра.* (Фиг. 321.

Рѣшен. На данной AB начертя равносторонной треугольникъ ABC, продолжи основаніе AB до D, чтобы AD равна была пяти AB; начерти на сихъ частяхъ равносторонные треугольники *x*; проведи чрезъ верхи ихъ линѣю CF=AD; точки D и F соедини прямою линѣею DF; наконецъ на CF начерти пять равносторонних треугольниковъ, получишь требуемую поверхность.

§ 398. ЗАДАЧА. *По данному діаметру* CD, *начертить поверхность шара.* (Фиг. 322.

Рѣшен. Проведя линѣю AB равную окружности круга діаметра CD, и раздѣля AB на 24 равныя части, поставь изъ средины *a*, *b* и проч. каждой части перпендикуляры *a*E, *b*F, *c*G и проч., чтобы каждой былъ равенъ $\frac{1}{4}$ окружности; потомъ сыскавъ центръ круга, котораго бы окружность проходила чрезъ точки E, B и E (§ 64) найденнымъ радіусомъ, уступая по части, описывай дуги EBE, FIF и проч., опиши всѣ 24 съ обѣихъ сторонъ дуги, то получится требуемая поверхность шара.

О измѣреніи и сравненіи поверхностей тѣлъ.

§ 399. *Опредѣл. Поверхность тѣла* просто называется только сумма плоскостей его сторонъ, выключая основанія, буде имѣются; а *цѣлою поверхностію* именуется поверхность тѣла вообще съ основаніями.

§ 400. ТЕОРЕМА. *Поверхность прямой призмы* HDFE *равна произведенію, изъ ея высоты на сумму боковъ основанія.* (Фиг. 289.

Доказ. Ибо поверхность призмы окружается толикимъ числомъ прямоугольниковъ, сколько боковъ въ основаніи находится (§ 364); но площадь каждаго изъ сихъ прямоугольниковъ, какъ DFGH, равна произведенію изъ высоты HD призмы на бокъ основанія ED или FC; слѣдовательно поверхность призмы равна произведенію изъ ея высоты DH или CE, на число перпендикуляровъ DC, DF и FC, составляющихъ окружность основанія DCF призмы HDFE.

Прибавл. Изъ сего явствуетъ, что поверхность параллепипеда DFEH (*фиг.* 290), исключая основанія, равна произведенію изъ высоты DH на сумму боковъ основанія DCF.

Слѣдств. Изъ того удобно разумѣть можно, что ежели будетъ извѣстна высота HD и бокъ DF основанія DCF (*фиг.* 289 и 290), то поверхность прямой призмы сыщется, когда количество бока DF умножится числомъ боковъ, а потомъ сумма сихъ боковъ умножится высотою DH; естьли же потребуется цѣлая поверхность оной, то надлежитъ найти площадь основанія DCF, и удвоя оную, придать къ найденной поверхности призмы.

§ 401. ТЕОРЕМА. *Поверхность прямаго цилиндра* DHEF, *равна произведенію изъ его высоты* DH *на окружность круга діаметра* FD. Фиг. 293.

Доказ. I. Поелику мы уже въ § 234 говорили, что кругъ есть правильной многоугольникъ имѣющій безконечное число боковъ; по сей причинѣ прямой цилиндръ не что иное, какъ призма окруженная безконечнымъ числомъ такихъ прямоугольниковъ, изъ коихъ

каждаго высота равна высотѣ HD цилиндра, а основаніе есть безконечно малая часть окружности основанія DGF; но поверхность всякой призмы по предыдущей теоремѣ равна произведенію изъ высоты на сумму боковъ основанія; слѣдовательно и поверхность цилиндра DHEF равна произведенію изъ высоты DH на окружность DFG основанія.

Доказ. II. Изъ начертанія поверхности цилиндра видно было, что поверхность онаго (исключая основанія) равна прямоугольнику ACDB (*фиг.* 312), коего основаніе AB равно окружности, а высота AC равна высотѣ цилиндра; но плоскость сего прямоугольника равна $AB \times AC$ (§ 160); слѣдовательно поверхность цилиндра DHEF равна произведенію изъ высоты DH на окружность DFG основанія.

§ 402. ТЕОРЕМА. *Поверхность прямой пирамиды ACBE равна произведенію изъ суммы боковъ, составляющихъ окружность основанія ABC, на половину высоты EF треугольника CBE, составляющаго бокъ пирамиды.* Фиг. 296.

Доказ. Поелику основаніе прямой пирамиды есть правильной многоугольникъ, и треугольники составляющіе поверхность пирамиды равны между собою (§ 373. *Слѣд.*), изъ коихъ площадь каждаго *на прим.* CBE, равна произведенію изъ половины высоты EF на бокъ BC основанія, то есть треугольникъ $BEC = CB \times \frac{1}{2} EF$; по сей причинѣ и сумма всѣхъ треугольниковъ составляющихъ поверхность пирамиды равна $4 CB \times \frac{1}{2} EF$, то есть поверхность пирамиды равна произведенію изъ суммы боковъ основанія на половину высоты EF треугольника BEC.

§ 403. ТЕОРЕМА. *Поверхность прямаго конуса AFBC, равна произведенію изъ окружности круга основанія ABF на половину наклоненнаго бока AC. Фиг. 298.*

Доказ. I. Поелику кругъ AEBF, есть правильной многоугольникъ имѣющій безконечное число боковъ; по сей причинѣ прямой конусъ не что иное, какъ прямая пирамида окружающаяся такою поверхностію (исключая основаніе), которая составлена изъ безконечнаго числа треугольниковъ, изъ коихъ каждаго основаніе есть безконечно малая часть окружности AFBE, а высота равна наклоненному боку AC; но поверхность всякой пирамиды равна произведенію изъ суммы боковъ основанія на половину высоты треугольника, составляющаго бокъ пирамиды; слѣдовательно и поверхность конуса равна произведенію изъ окружности AFBE основанія, на половину наклоненнаго бока AC.

Доказ. II. Поелику поверхность конуса (исключая основаніе) равна вырѣзку круга ABC (*фиг.* 314), коего дуга AC равна окружности основанія AEBF (*фиг.* 298), а радіусъ AB равенъ наклоненному боку AC; но площадь сего вырѣзка равна произведенію изъ дуги AC на половину радіуса AB; слѣдовательно и поверхность конуса AFBC равна произведенію изъ окружности AEBF основанія на половину наклоненнаго бока AC.

Изъ сего явствуетъ, что поверхность конуса безъ основанія равна такому треугольнику, коего основаніе равно окружности AEBF основанія конуса (*фиг.* 298), а высота равна наклоненному боку AC (§ 234. *Слѣд.* 3).

§ 404. ТЕОРЕМА. *Поверхность прямой отрѣзной пирамиды ADCGE, равна произведенію изъ полсуммы боковъ большаго ABCD и меньшаго EFGH основанія пирамиды, на высоту HP трапеціи DHGC, составляющей бокъ пирамиды.* Фиг. 300.

Доказ. Поелику площадь трапеціи DHGC, опредѣляющей сторону пирамиды, равна $HP \times \frac{1}{2}(HG + DC)$ (§ 168); слѣдственно поверхность сей пирамиды будетъ равна $HP \times \frac{1}{2}(DC + HG) \times 4 = HP \times \frac{1}{2}(4DC + 4HG)$; то есть полсуммы боковъ верхняго и нижняго основанія, умноженная высотою HP, равна поверхности пирамиды, выключая основанія.

§ 405. ТЕОРЕМА. *Поверхность прямаго отрѣзнаго конуса ABEF, равна произведенію изъ полсуммы окружностей большаго и меньшаго круга, составляющихъ основанія конуса, на наклоненной бокъ AF.* Фиг. 323.

Доказ. Поелику поверхность цѣлаго конуса ABC равна треугольнику, коего основаніе равно окружности ABD, а высота равна наклоненному боку AC; то положивъ, что въ треугольникѣ HGK основаніе GK равно окружности ABD, а высота HG равна боку AC конуса ABC, сдѣлай HI равно боку CF, и проведя IL параллельно къ GK, докажется, что IL будетъ равна окружности круга діаметра EF; ибо для подобія треугольниковъ HIL и HGK будетъ $HI : HG = IL : GK$ (§ 117); а для подобія треугольниковъ CFE и CAB, будетъ $CF : AC = FE : AB$; но поелику $HI = CF$, $HG = AC$, то для равенства первыхъ содержаній будетъ $IL : GK = FE : AB$; естьли же положимъ окружность круга діаметра $EF = y$, а окружность діамет-

ра AB=x, то будетъ EF : AB=y : x (§ 152. *Слѣд.* 1); а для равенства содержаній сихъ послѣднихъ пропорцій, будетъ IL : GK=y : x; но GK=x по положенію, по сему IL=y равно окружности круга діаметра EF (*Ариѳм.* § 125); слѣдовательно треугольникъ HIL равенъ поверхности конуса FCE; по сей причинѣ треугольникъ HGK безъ треугольника HIL, т. е. площадь трапеціи GILK равна поверхности отрѣзнаго конуса ADBEF. Но какъ площадь сей трапеціи равна произведенію изъ полсуммы параллельныхъ линѣй IL и GK на высоту GI (§ 168), изъ коихъ IL равна окружности EFи, GK равна окружности ABD, а высота GI равна наклоненному боку AF конуса ADBEF; слѣдовательно поверхность онаго (исключая основанія) равна произведенію изъ полсуммы окружностей обоихъ круговъ на наклоненной бокъ AF.

§ 406. ЗАДАЧА. *По высотѣ* DH=40° *и діаметру основанія* DF=20° *цилиндра* ED, *сыскать поверхность онаго.* (Фиг. 293.

Рѣшен. Сыщи по діаметру DF окружность основанія цилиндра, умножь оную высотою DH, получишь поверхность цилиндра, то есть 7 : 22=20 : 62 . 85 равно окружности основанія, и (62.85)×40=2514° равно поверхности цилиндра ED. Ежели къ сей поверхности придастся удвоенная площадь круга DFG, то есть (314 . 25)×2=628 . 50, то получится 2514°+628.50=3142°. 50 равно цѣлой поверхности цилиндра HDFE.

§ 407. ЗАДАЧА. *По данному наклоненному боку* BE=50° *и боку* BC=60° *основанія* ABC *прямой пирамиды* ACBE, *найти поверхность оной.* (Фиг. 296.

Рѣшен. Сперва сыщи высоту EF равнобедреннаго треугольника BCE; потомъ умножа величину бока BC, числомъ боковъ основанія пирамиды, умножь сію найденную окружность основанія половиною высоты EF, получишь требуемую поверхность, какъ то изъ слѣдующаго видно: $\frac{60}{2}=30=\frac{1}{2}BC=BF$, по сему $50\times50=2500^\circ=\overline{BE}^2$ и $30\times30=900^\circ=\overline{BF}^2$; но $\overline{BE}^2-\overline{BF}^2=\overline{EF}^2=2500-900=1600^\circ$, и $\sqrt{1600^\circ}=40=EF$; потомъ $60\times4=240^\circ$ равно окружности основанія ABC, и наконецъ $240\times\frac{40}{2}=4800^\circ$ равно поверхности пирамиды.

§ 408. ЗАДАЧА. *По данному наклоненному боку AC=100′ и діаметру основанія AB=70′ прямаго конуса ACB, найти цѣлую поверхность онаго.* (Фиг. 298.

Рѣшен. Сыскавъ по діаметру AB окружность основанія AFB конуса ACB (§ 235), умножь оную половиною наклоненнаго бока AC, произведеніе будетъ равно поверхности конуса безъ основанія; наконецъ сыскавъ площадь круга діаметра AB, придай къ поверхности конуса, получишь требуемую поверхность, какъ то изъ слѣдующаго усмотрѣть можно: $7:22=70':220'$=окружности круга діаметра AB; потомъ $220'\times\frac{100'}{2}=11000'$ квадрат.=поверхности конуса ACB; но какъ $220'\times\frac{70}{4}=3850'$ равно площади круга діаметра AB, то будетъ $11000'+3850'=14850'$ равно цѣлой поверхности конуса (§ 403).

§ 409. ЗАДАЧА. *Прямой четвеpосторонной отрѣзной пирамиды AG, извѣстны бокъ большаго квадрата DC=80°, меньшаго GH=20° и наклоненный бокъ DH=120°, сыскать поверхность оной.* (Фиг. 300.

Рѣшен. Сыскавъ въ трапецiи DHGC перпендикуляръ HP (§ 193), сумму боковъ квадрата AC сложи съ суммою боковъ квадрата EG; потомъ умножь половину сей суммы перпендикуляромъ HP, получишь требуемую поверхность безъ основанiй (§ 404); а чтобъ сыскать цѣлую поверхность, то къ сему произведенiю придай плоскость верхняго квадрата EG и нижняго AC, получишь цѣлую поверхность пирамиды, какъ-то изъ слѣдующаго видно: когда 80°=DC, 20°=GH, то будетъ сысканная по § 193 высота HP равна 116°; потомъ будетъ 80°×4=320° равно сум. бок. квадр. AC и 20°×4=80° равно сум. бок. квадр. EG; по сему 320°+80°=400° равно сум. окружн. верхн. и нижн. квадр. $\frac{400}{2}$=200° равно полсум. окружн. верхн. и нижн. квадр. и 200°×116°=23200° равно поверхности пирамиды AG; наконецъ 80°×80°=6400°=$\overline{DC}^2$, 20°×20°=400°=$\overline{GH}^2$; по 23200°+6400°+400°=30000° равно цѣлой поверхности пирамиды AG.

§ 410. ЗАДАЧА. *По данному дiаметру меньшаго круга* CD=40°, *большаго* AB=100° *и наклоненному боку* AC=180°, *сыскать поверхность прямаго отрѣзнаго конуса* ABDC. Ф. 301.

Рѣшен. Сыскавъ по дiаметрамъ CD и AB окружности круговъ, полсуммы сихъ окружностей умножь наклоненнымъ бокомъ AC, получишь поверхность конуса ABDC безъ основанiй (§ 405); потомъ придавъ къ сей поверхности площади обоихъ круговъ AB и CD, получишь цѣлую поверхность конуса, какъ-то изъ слѣдующаго видно; ибо 7:22=40°:125°.7 равно окружн. круга CD, также 7:22=100°: 314.2 равно окружн. круга AB; по сему 125.7

+314.2=439°.9 равно суммѣ окружностей; потомъ $\frac{439.9}{2}$×180=39591° квадр. равно поверх. конуса; наконецъ будетъ сысканная площадь круга CD=1257°, а площадь круга AB=7857°; по сему 39591+1257+7857=48705° квадр. равно цѣлой поверхности конуса ABDC.

§ 411. ЗАДАЧА. *Извѣстна цѣлая поверхность цилиндра* AD *и высота* AC, *сыскать онаго діаметръ основанія* AB. Фиг. 324.

Рѣшен. и *Доказ.* Положимъ, что прямоугольника EFGH основаніе EF равно окружности круга діаметра AB, а EH равно высотѣ AC цилиндра ACDB; то прямоугольникъ EG съ параллелограммомъ HI, которой равенъ площади двухъ круговъ HO и EP, кои суть основанія цилиндра (§ 234. *Слѣд.* 1), т. е. прямоугольникъ EI будетъ равенъ цѣлой поверхности цилиндра. Но поелику, когда діаметръ OH раздѣлится на 14 равныхъ частей, то въ окружности круга HOD, которая равна HG=KI, будетъ 44, а въ радіусѣ KM 7 такихъ же частей (§ 234 *Приб.*); и для того будетъ 44:7 =KI:KM=EKIF:EKMN, то есть 44:7 какъ извѣстная площадь прямоугольника EI къ площади прямоугольника EM (§ 172); и напослѣдокъ по сысканной площади прямоугольника EKMN и разности боковъ KE—KM=EH, сыщется радіусъ KH=KM (§ 213), и KH×2=HO равно діаметру AB даннаго цилиндра ACDB.

§ 412. ТЕОРЕМА. *Ежели отрѣзной конусъ* ACDB, *разрѣжется плоскостію* NP *параллельною основанію* AB, *чрезъ половину наклоненнаго бока* AC, *то окружность сего сѣченія, будетъ равна полсуммѣ двухъ окружностей большаго* AB *и меньшаго круга* CD. Фиг. 301.

Доказ. Положимъ, что окружность круга діаметра CD$=a$, окружность круга діаметра AB$=b$, а окружность діаметра NP$=d$, то будетъ CD$:a=$AB$:b=$NP$:d$ (§ 152. *Слѣд.* 1); а изъ сей пропорціи выйдетъ слѣдующая пропорція: CD$+$AB$:a+b=$NP$:d$ (*Ариѳм.* § 131); но какъ $\frac{1}{2}(a+b)=d$ (*Ариѳм.* § 125), то есть полсуммы окружностей двухъ круговъ діаметровъ CD и AB, равна окружности круга діаметра NP. Изъ сего видно, что поверхность прямаго отрѣзнаго конуса ABDC безъ основаній, равна произведенію изъ окружности круга діаметра NP, на наклоненной бокъ AC (§ 405).

§ 413. ТЕОРЕМА. *Поверхность шара* ALBM *равна произведенію изъ діаметра* AB *на окружность большаго круга.* (Фиг. 325.

Доказ. Ежели вообразимъ себѣ, что половина окружности ALB, раздѣлится на безконечное число частей LD, DE, ER и проч., то каждая изъ сихъ дугъ, *на прим.* DE, будучи безконечно малая часть окружности, безъ погрѣшности принята быть можетъ за прямую линѣю или хорду, которая соединясь съ сею дугою, составляетъ одну и ту же прямую линѣю DE. И такъ, когда половина окружности ALB обратится около своего діаметра AB, то отъ обращенія оной произойдетъ поверхность шара (§ 378); а отъ обращенія каждой изъ тѣхъ безконечно малыхъ духъ, какъ-то LD, DE, ER и проч. произойдетъ поверхность конуса DLMN, EDNP и проч. (§ 377), изъ коихъ всякой не что иное, какъ безконечно тонкой слой шара, коихъ сумма поверхностей равна поверхности шара. Теперь ежели проведутся изъ точекъ E

и D линѣи EH и DK перпендикулярно къ діаметру AB, и чрезъ средину F хорды ED линѣю FG параллельно къ DK, и радіусъ FC (которой будетъ перпендикуляръ къ ED) (§ 59. *Слѣд.* 1); а потомъ изъ точки E опустится перпендикуляръ EI на DK; то въ разсужденіи того, что линѣя EI перпендикулярна къ DK и FG, также FC перпендикулярна къ DE, будетъ треугольникъ EF*o* прямоугольной, и треугольникъ EF*n* подобенъ треугольнику F*no* (§ 121); но поелику въ разсужденіи параллельныхъ линѣй F*n* и DI, также *no* и GC, треугольники EF*n* и EDI суть подобны; также и треугольникъ F*no* подобенъ треугольнику FGC, то будетъ и треугольникъ EDI подобенъ треугольнику FCG; и для подобія сихъ треугольниковъ, будетъ ED : EI = FC : FG; но потому что окружности круговъ содержатся между собою какъ ихъ радіусы (§ 152. *Слѣд.* 1), то положивъ окружность круга радіуса FC или AC = x, а окружность радіуса FG = y, будетъ $x : y$ = FC : FG; и для равенства содержаній будетъ ED : EI = $x : y$, при чемъ будетъ ED $\times y$ = EI $\times x$ (*Ариѳм.* § 115) = HK $\times x$; но какъ первое произведеніе ED $\times y$, означаетъ поверхность отрѣзнаго конуса EDNP, произшедшую отъ обращенія бока ED, прямоугольной трапеціи DKHE (§ 411); по сей причинѣ и произведеніе HK $\times x$, то есть произведеніе изъ оси HK конуса, на окружность большаго круга x, равно поверхности конуса EDNP. Равнымъ образомъ докажется, что поверхность конуса DLMN и проч. равна произведенію изъ оси KC и той же окружности x; слѣдовательно сумма поверхностей

всѣхъ конусовъ, составляющихъ цѣлую поверхность шара, равна произведенію изъ суммы всѣхъ ихъ осей, то есть изъ діаметра AB, на окружность x большаго круга.

Слѣдств. I. Изъ сего явствуетъ, что поверхность шара вчетверо больше площади большаго круга діаметра AB; ибо поверхность шара равна произведенію изъ діаметра AB на окружность x сего діаметра, а площадь большаго круга равна произведенію изъ четверти діаметра AB на ту же окружность; и слѣдовательно первое произведеніе AB×x, вчетверо больше послѣдняго $\frac{1}{4}$AB×x.

Слѣдств. II. Поверхность шара GEHF (*фиг.* 326) равна кривой поверхности цилиндра ABDC, описаннаго около онаго шара; ибо поверхность цилиндра (исключая основанія), равна произведенію изъ окружности діаметра BD основанія, на высоту AB умноженной; но окружность діаметра BD равна окружности діаметра EF большаго круга, а высота AB равна діаметру EF шара; слѣдовательно въ обоихъ случаяхъ произведенія будутъ равны; а потому и поверхность шара равна кривой поверхности цилиндра, описаннаго около того же шара.

Слѣдств. III. Изъ доказательства о мѣрѣ поверхности шара удобно разумѣть можно, что выпуклая поверхность отрѣзка EGFA (*фиг.* 304), раждающаяся отъ обращенія дуги AE около діаметра AB, равна произведенію изъ окружности большаго круга шара, на высоту AG отрѣзка умноженной; равнымъ образомъ и поверхность части шара или зоны, заключаю-

щейся между двухъ окружностей параллельныхъ круговъ діаметровъ CD и AB (*фиг.* 305), равна произведенію изъ окружности большаго круга діаметра LN, шара NGBK, на высоту EF умноженной. Ибо каждая изъ сихъ поверхностей, также какъ и поверхность шара, составлена изъ безконечнаго числа поверхностей отрѣзныхъ конусовъ, изъ коихъ поверхность каждаго равна произведенію изъ окружности большаго круга шара на высоту конуса.

§ 414. ЗАДАЧА. *По данному діаметру шара AB=1000° сыскать поверхность онаго.* Фиг. 302.

Рѣшен. По діаметру AB сыщи окружность большаго круга шара (§ 235), котораго умножа діаметромъ AB, получишь требуемую поверхность, какъ-то изъ слѣдующаго видно, 7:22=1000°:3142°.857 равно окружности, и (3142.857×1000)=3142857°=поверхнос. шара.

Прибавл. Естьли будетъ извѣстна поверхность шара, то діаметръ AB сыщется; ибо раздѣля поверхность шара на четыре равныя части, получится площадь круга діаметра AB (§ 413. *Слѣд.* 1); по извѣстной площади круга сыщется діаметръ AB (§ 239).

§ 415. ТЕОРЕМА. *Выпуклая поверхность отрѣзка EAF шара, равна площади круга, коего радіусъ хорда AE.* Фиг. 304.

Доказ. Ибо (положа площадь круга радіуса $AD=y$, окружность его равна P, площадь круга радіуса $AE=x$), будетъ $y:x=\overline{AD}^2:\overline{AE}^2$; а умножа предыдущіе члены чрезъ 4, будетъ $4y:x=4\overline{AD}^2:\overline{AE}^2=\overline{AB}^2:\overline{AE}^2$ (ибо $4\overline{AD}^2=\overline{AB}^2$); но $\overline{AB}^2:\overline{AE}^2=AB:AG$ (§ 245); по сему $4y:x=AB:AG$; по умноженіижъ членовъ втораго содержанія на

окружность P, будетъ $4y : x = AB \times P : AG \times P$; но $AB \times P = 4y$ равно поверхности шара (§ 413), слѣдовательно $AG \times P = x$ (*Ариѳм.* § 125); но $AG \times P$ равно поверхности отрѣзка EAF шара (§ 413. *Слѣд.* 3); слѣдовательно и площадь круга x радіуса AE, равна выпуклой поверхности отрѣзка.

§ 416. ЗАДАЧА. *По извѣстной хордѣ* $EF = 120°$, *и высотѣ* $AG = 40°$ *отрѣзка шара* EFA, *найти цѣлую поверхность онаго.* (Фиг. 304.

Рѣшен. Раздѣля хорду EF на двѣ равныя части, сдѣлай слѣдующую пропорцію: $AG : EG = EG : GB$ (§ 125); потомъ найденную GB сложи съ AG, то сумма будетъ равна діаметру AB. По діаметру AB сыскавъ окружность большаго круга шара (§ 235), умножь оную высотою AG, получишь выпуклую поверхность отрѣзка EAF (§ 413. *Слѣд.* 3); потомъ по извѣстному діаметру EF сыскавъ площадь круга, придай оную къ поверхности отрѣзка шара, получишь цѣлую поверхность, какъ-то изъ слѣдующаго видно: $\frac{120}{2} = 60 = EG$, и $AG : EG = EG : GB$, то есть $40 : 60 = 60 : 90 = GB$, по сему $90 + 40 = 130 = GB + AG$ равно діаметру AB; потомъ $7 : 22 = 130 : 408 . 57 =$ окружности большаго круга; $408 . 57 \times 40 = 16342°. 80 =$ квадрат. поверхн. отрѣзка шара. Но какъ найденная по § 238. *Приб.* 2. площадь круга діаметра $EF = 11314°. 98$, то будетъ $16342.80 + 11314.98 = 27657.08$ квадр. равно цѣлой поверх. отрѣзка шара EFA.

Другимъ образомъ. Сперва по извѣстной AG и EG должно сыскать AE (§ 75); а потомъ когда по извѣстному радіусу AE найдется площадь круга діаметра EH, то площадь сего кру-

та означать будетъ выпуклую поверхность отрѣзка EAF шара (§ 415); а придавъ къ оной площадь круга діаметра EF, будешь имѣть цѣлую поверхность отрѣзка шара.

Слѣдств. Когда дана будетъ выпуклая поверхность отрѣзка шара EAF и высота AG, то діаметръ AB сыщется; ибо когда данная поверхность на высоту AG раздѣлится, то частное будетъ равно окружности большаго круга діаметра AB, а по окружности онаго сыщется діаметръ AB.

§ 417. ЗАДАЧА. *По извѣстной хордѣ EF и высотѣ AD, падающей на половину хорды EF, найти цѣлую поверхность вырѣзка шара ECFA.* Фиг. 303.

Рѣшен. По предыдущей задачѣ сыскавъ діаметръ AB, найдется выпуклая поверхность отрѣзка EAF шара; а потомъ сыскавъ поверхность конуса EFC (§ 408), сложи съ поверхностію отрѣзка, получишь цѣлую поверхность вырѣзка шара.

Прибавл. Для сысканія поверхности каждаго правильнаго тѣла, надлежитъ прежде по извѣстному боку найти площадь одной его стороны, а потомъ умножа оную на число сторонъ окружающихъ тѣло, получится поверхность онаго.

О содержаніяхъ поверхностей тѣлъ.

§ 418. *Опредѣл. Подобныя тѣла* называются тѣ, коихъ всѣ сходственные углы равны, и притомъ ограничиваются равнымъ числомъ подобныхъ плоскостей.

§ 419. ТЕОРЕМА. *Поверхности подобныхъ конусовъ содержатся между собою какъ квадраты сходственныхъ частей.* (Фиг. 327.

Доказ. Пусть будутъ подобные конусы ABC и *abc* (то положа окружность діаметра $AC=x$, а окружность діаметра $ac=y$), для подобія конусовъ будетъ $AB:ab=AC:ac=x:y$ (§ 152. *Слѣд.* 1); по сему $x:y=AB:ab$; а умноживъ предыдущіе члены чрезъ AB, а послѣдующіе чрезъ *ab*, будетъ $AB\times x:ab\times y=\overline{AB}^2:\overline{ab}^2$; потомъ раздѣля члены перваго содержанія на 2, будетъ $\frac{1}{2}AB\times x:\frac{1}{2}ab\times y=\overline{AB}^2:\overline{ab}^2$; но $AB:ab=AC:ac$; также и $\overline{AB}^2:\overline{ab}^2=\overline{AC}^2:\overline{ac}^2$ (*Аривм.* § 129), по сему $\frac{1}{2}AB\times x:\frac{1}{2}ab\times y=\overline{AB}^2:\overline{ab}^2=\overline{AC}^2:\overline{ac}^2$; но $\frac{1}{2}AB\times x$ есть поверхность конуса ABC, а $\frac{1}{2}ab\times y$ равно поверхности конуса *abc* (§ 403); слѣдовательно поверхности подобныхъ конусовъ содержатся между собою какъ квадраты сходственныхъ боковъ или діаметровъ основанія.

Слѣдств. I. Изъ того видно, что вообще поверхности какихъ нибудь подобныхъ тѣлъ содержатся между собою какъ квадраты сходственныхъ боковъ. Ибо два подобныя тѣла имѣютъ всѣ ихъ сходственныя стороны подобны, коихъ одинакія бока суть пропорціональны, и площади тѣхъ сторонъ содержатся между собою какъ квадраты сходственныхъ боковъ (§ 243); слѣдовательно и сумма сторонъ, то есть поверхность одного тѣла содержится къ поверхности другаго, какъ квадратъ бока одного, къ квадрату сходственнаго бока другаго тѣла. *На прим.* поверхность прямой пирамиды ABCD будетъ содержаться къ поверхности пи-

рамиды *abcd* (*фиг.* 328), какъ $\overline{DC}^2 : \overline{dc}^2$ или $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$, потому что треугольникъ $DBC : \Delta dbc = \overline{DC}^2 : \overline{dc}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$ (§ 173); а умножа члены перваго содержанія чрезъ 3, будетъ $3DBC : 3dbc = \overline{DC}^2 : \overline{dc}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$, то есть поверхность пирамиды ABCD къ поверхности пирамиды $abcd = \overline{DC}^2 : \overline{dc}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$. Основаніежъ $ADC : adc = \overline{DC}^2 : \overline{dc}^2 = 3DBC : 3dbc$ (*Ариѳм.* § 113), по сему $3DBC + ADC : 3dbc + adc = \overline{DC}^2 : \overline{dc}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$ (*Ариѳм.* § 118), то есть и цѣлыя поверхности пирамидъ ABCD и *abcd* содержатся между собою какъ квадраты сходствен. боковъ.

Слѣдств. II. Поверхности шаровъ какъ квадраты ихъ радіусовъ или діаметровъ (*фиг.* 329). Ибо положа площадь большаго круга діаметра $AB = x$, а площадь круга діаметра $ab = y$, будетъ $x : y = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{ad}^2$ (§ 244); а умножа члены перваго содержанія чрезъ 4, будетъ $4x : 4y = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 = \overline{AD}^2 : \overline{ad}^2$; но $4x$ равно поверхности шара діаметра AB, и $4y$ равно поверхности шара діаметра *ab* (§ 413. *Слѣд.* 1); слѣдовательно поверхности шаровъ какъ квадраты радіусовъ или діаметровъ.

§ 420. ЗАДАЧА. *Извѣстна цѣлая поверхность конуса* $ABC = 100179°.56$ *и содержаніе наклоненнаго бока* AB *къ діаметру* $AC = 7 : 3$, *найти бокъ* AB *и діаметръ* AC. (Фиг. 327.

Рѣшен. Представимъ себѣ другой конусъ *abc*, коего діаметръ $ac = 3$, а наклоненной бокъ $ab = 7$ частямъ; потомъ по діаметру *ac*, и наклоненному боку *ab* надлежитъ сыскать цѣлую поверхность онаго (§ 408); и для подобія конусовъ *abc* и ABC сдѣлать слѣдующую пропор-

цію: цѣлая поверхность конуса *abc* содержится къ поверхности даннаго конуса ABC какъ $\overline{ac}^2 : \overline{AC}^2$ (§ 419); $\sqrt{\overline{AC}^2}$ будетъ равенъ діаметру AC; а наконецъ будетъ 3:7=AC къ наклоненному боку AB, какъ-то изъ слѣдующаго явствуетъ. Сысканная по § 408 цѣлая поверхность конуса *abc* будетъ 40°.04, потомъ 3×3=9=$\overline{ac}^2$; и для того будетъ 40.04:10017 9.56=9:22517° =площади квадрата діаметра AC; и $\sqrt{22517°}$ =150° равно AC; наконецъ 3:7=150°:350° равно наклоненному боку AB.

Примѣч. Такимъ же образомъ по извѣстнымъ поверхностямъ и содержанію боковъ сыскиваются бока или данныя части призмъ, цилиндровъ и проч.

§ 421. ТЕОРЕМА. *Поверхность прямаго цилиндра* DE *къ площади основанія* DFG, *какъ высота* DH *къ четверти діаметра* DF. (Фиг. 293.

Доказ. Положимъ что окружность круга діаметра DF=y, то будетъ поверхность цилиндра равна DH×y (§ 401); а площадь круга діаметра DF=$\frac{1}{4}$DF×y (§ 234); по сему DH×y: $\frac{1}{4}$DF×y=DH: $\frac{1}{4}$DF; потому что въ сей пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ $\frac{1}{4}$DF×DH×y =произвед. среднихъ $\frac{1}{4}$DF×DH×y (*Ариѳм.* § 116).

§ 422. ТЕОРЕМА. *Поверхность прямаго конуса* ABC *къ площади основанія* ABF, *какъ наклоненной бокъ* BC *къ радіусу* BD. Фиг. 298.

Доказ. Положивъ окружность круга діаметра AB=y, будетъ поверхность конуса ABC= $\frac{1}{2}$BC×y (§ 403), а площадь круга радіуса BD= $\frac{1}{2}$BD×y (§ 234); по сей причинѣ $\frac{1}{2}$BC×y : $\frac{1}{2}$BD×y= BC:BD, потому что въ сей пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ $\frac{1}{2}$BD×BC×y, равно произведенію среднихъ $\frac{1}{2}$BD×BC×y (*Ариѳм.* § 116).

Слѣдст. Изъ того явствуетъ, когда наклоненной бокъ AC будетъ равенъ діаметру AB, то кривая поверхность прямаго конуса ABC будетъ вдвое больше плоскости своего основанія; поелику наклоненной бокъ AC будетъ вдвое больше радіуса AD; слѣдовательно цѣлая поверхность такого конуса втрое больше площади круга основанія.

§ 423. ТЕОРЕМА. *Цѣлая поверхность цилиндра* ABDC *описаннаго около шара* GEHF, *содержится къ поверхности сего шара, какъ* 3 *къ* 2. Фиг. 326.

Доказ. Положа площадь большаго круга діаметра EF или DB$=x$, будетъ какъ поверхность шара, такъ и поверхность цилиндра ABDC безъ основаній равна $4x$ (§ 413. *Слѣд.* 2); а придавъ къ поверхности цилиндра BC плоскость круга діаметра BD и діаметра AC, то есть $2x$, то цѣлая поверхность онаго будетъ равна $6x$; слѣдовательно $6x:4x=6:4=3:2$, т. е. цѣлая поверхность цилиндра BC, къ поверхности шара въ немъ вписаннаго какъ $3:2$.

Слѣдст. Цѣлая поверхность цилиндра, коего діаметръ основанія равенъ высотѣ, вшестеро больше площади своего основанія; поелику $6x$ равна цѣлой поверхности, а площадь основанія равна x.

§ 424. ТЕОРЕМА. *Выпуклая поверхность отрѣзка шара* GNIH *къ поверхности конуса* GHI *въ немъ вписаннаго, какъ бокъ* GH *къ радіусу* GN. Фиг. 330.

Доказ. Положивъ площади круговъ радіуса GH$=x$, радіуса GN$=y$, поверхность конуса GHI$=z$, будетъ $x:y=$GH×GH:GN×GN (§ 224); также $y:z=$GN:GH (§ 422); а умножа члены

первой пропорціи на члены другой, будетъ $x \times y : y \times z = GH \times GH \times GN : GN \times GN \times GH$ (*Ариѳм.* § 128); а по раздѣленіи членовъ перваго содержанія на y, а втораго на GH и GN, будетъ $x : z = GH : GN$ (*Ариѳм.* § 122. *Приб.* 2); но поелику площадь круга радіуса $GH = x$ равна поверхности отрѣзка GIH (§ 415); слѣдственно поверхность отрѣзка шара GIH содержится къ поверхности конуса GHI, какъ бокъ GH къ радіусу GN.

Слѣдств. Изъ сего видно, что выпуклая поверхность отрѣзка шара KHL вдвое больше поверхности равнобочнаго конуса KLH въ немъ вписаннаго; ибо тогда бокъ KH будетъ вдвое больше радіуса KP.

§ 425. ТЕОРЕМА. *Поверхность шара* AHBM *содержится къ цѣлой поверхности равнобочнаго конуса* QSR, *около шара описаннаго, какъ* 4 : 9. (Фиг. 330.

Доказ. Поелику треугольникъ OKL подобенъ треугольнику OQR, то будетъ $OP : OM = KL : QR$; но какъ OM вдвое больше OP (§ 104), то будетъ $QR = 2KL$; по сему $\overline{QR}^2 = 4\overline{KL}^2$; слѣдовательно $\overline{KL}^2 : \overline{QR}^2 = 1 : 4$; но $\overline{KL}^2 : \overline{AB}^2 = 3 : 4$ (§ 179. *Приб.*), то будетъ $\overline{AB}^2 : \overline{QR}^2 = 1 : 3$ (*Ариѳм.* § 127); площади же круговъ содержатся между собою какъ квадраты ихъ діаметровъ; слѣдовательно (положивъ площадь круга діаметра $AB = x$, а площадь круга діаметра $QR = y$) будетъ $x : y$ 1 : 3; но какъ поверхность шара вчетверо больше площади большаго круга x (§ 413. *Слѣд.* 1), а поверхность конуса QSR втрое больше площади круга y основанія (§ 422. *Слѣд.*); то

умноживъ предыдущіе члены чрезъ 4, а послѣдующіе чрезъ 3, будетъ $4x:3y=4:9$, т. е. поверхность шара AHBM, содержится къ цѣлой поверхности конуса QRS, какъ 4 къ 9ти.

Слѣдств. Поелику поверхности подобныхъ тѣлъ содержатся какъ квадраты сходственныхъ частей; но какъ $\overline{QR}^2=4\overline{KL}^2$, и слѣдовательно $\overline{QR}^2$ вчетверо больше $\overline{KL}^2$; то изъ сего явствуетъ, что цѣлая поверхность конуса QRS около шара описаннаго, вчетверо больше цѣлой поверхности конуса KHL вписаннаго въ шарѣ.

§ 426. ТЕОРЕМА. *Ежели около шара* AHBM *опишется цилиндръ* CEFD *и равнобочный конусъ* QRS, *то поверхности сихъ трехъ тѣлъ будутъ содержаться между собою какъ* ∺ 4:6:9. Фиг. 330.

Доказ. Ибо положа поверхность шара равна Z, поверхность цилиндра равна P, поверхность конуса равна V, будетъ $Z:P=4:6$ (§ 423), и $V:Z=9:4$ (§ 425); а умножа члены одной пропорціи членами другой пропорціи, будетъ $V\times Z:P\times Z=36:24$; потомъ раздѣля члены перваго содержанія на Z, а втораго содержанія на 4, будетъ $P:V=6:9$; по сей причинѣ выйдетъ непрерывная пропорція ∺ $Z:P:V=4:6:9$.

Слѣдств. Изъ сего видно, что поверхность описаннаго цилиндра CEFD, есть средняя Геометрическая плоскость между поверхностію шара и поверхностію описаннаго конуса.

О измѣреніи толстоты тѣлъ.

§ 427. *Опредѣл. Величина тѣла* есть мѣсто, или въ предѣлахъ заключающееся пространство, тѣломъ занятое.

§ 428. ТЕОРЕМА. *Прямыя и наклоненныя призмы и цилиндры, имѣющія равныя основанія и равныя высоты* EF, *толстотою равны.* Фиг. 331, 332 *и* 333.

Доказ. Ибо ежели вообразимъ себѣ, что сіи тѣла разрѣжутся плоскостьми параллельными ихъ основаніямъ въ безконечно тонкіе слои въ одну только точку толщиною, то изъ сего непремѣнно заключить можно, что каждое предложенное тѣло составлено изъ толикаго числа безмѣрно тонкихъ слоевъ, сколько высота EF каждаго имѣетъ въ себѣ точекъ; и притомъ каждой слой изъ сихъ разрѣзовъ равенъ основанію призмы или цилиндра (§ 375. *Прим.*); или все то же, что число тѣлесныхъ точекъ составляющихъ плоскость основанія; но поелику высоты EF, предложенныхъ тѣлъ, равны по положенію; слѣдовательно каждое изъ сихъ тѣлъ составлено изъ одинакаго числа равныхъ слоевъ, составляющихъ толстоту каждаго тѣла, а потому и толстоты ихъ суть равны между собою.

§ 429. *Полож.* Тѣла измѣряются также тѣлами, постоянной величины за единицу принятыми, какъ-то: кубическими саженьми, кубическими футами, кубическими дюймами и проч. *Кубическая сажень* есть кубъ *abcd* (*фиг.* 334), у котораго каждое измѣреніе въ длину, ширину и высоту по сажени. *Кубической футъ* есть кубъ, у коего всѣ три измѣренія по футу и т. д.

Примѣч. Подъ словомъ измѣрить толстоту какого нибудь тѣла, разумѣется найти такое число, сколько разъ за мѣру принятое тѣло содержится въ другомъ данномъ тѣлѣ; *на прим.* естьли желаемъ

измѣрить толстоту трехсторонной призмы GCFE (*фиг.* 332), то надлежитъ узнать, сколько разъ въ сей призмѣ содержится такихъ кубовъ *abcd* (*фиг.* 334), которой пріемлется извѣстною мѣрою, для измѣренія всякаго тѣла.

Изъ сего удобно разумѣть можно, что толстота тѣла во сто кубическихъ футовъ, должна занять такое пространство, которое бы дѣйствительно сотью кубическими футами наполнено было.

§ 430. ТЕОРЕМА. *Толстота прямой четверосторонной призмы* ABCDEG, *равна произведенію изъ плоскости основанія* BCDH *и высоты* AB. Фиг. 335.

Доказ. Поелику мы уже видѣли, что при измѣреніи толстоты тѣлъ разсматривается, сколько разъ кубъ *abcd* (*фиг.* 334), принятой для измѣренія тѣлъ за единицу, содержится въ другомъ предложенномъ тѣлѣ; то положивъ, что бокъ *ab* или *bc* сего куба *abcd*, въ каждомъ боку BC и CD основанія BCDH призмы ABCDEG, содержится 5 разъ, а въ высотѣ AB 9 разъ; вообразимъ себѣ, что каждой бокъ BC и CD основанія BCDH раздѣлится на 5, а высота AB на 9 равныхъ частей; и потомъ призма ABCDEG, чрезъ точки дѣленій высоты AB, разрѣжется плоскостьми параллельными основанію BCDH, то отъ сихъ разрѣзовъ произойдетъ девять равныхъ призмъ, имѣющихъ основанія равныя основанію BCDH (§ 375. *Прим.* и 428), и высота каждой будетъ равна боку *ab*, кубической мѣры *abcd* (*фиг.* 334). И такъ когда длина BC умножится широтою CD основанія BCDH, то произведеніе $BC \times CD = \overline{BC}^2 = 5 \times 5 = 25$, будетъ означать число квадратныхъ мѣръ *bcne* (*фиг.* 334), содержащихся въ основаніи BCDH, или

число кубовъ *abcd*, на семъ основаніи поставиться могущихъ, кои всѣ вмѣстѣ составятъ толстоту одной изъ отрѣзанныхъ призмъ; а когда число сихъ кубовъ умножится числомъ помянутыхъ призмъ, составляющихъ толстоту призмы ABCDEG, или все равно числомъ частей содержащихся въ высотѣ AB, то произведеніе $\overline{BC}^2 \times AB = 25 \times 9 = 225$ означитъ число кубическихъ мѣръ, составляющихъ толстоту всей призмы ABCDEG; слѣдовательно толстота призмы ABCDEG, равна произведенію изъ плоскости основанія BCDH и высоты AB.

Изъ сего видно, ежели бокъ *bc* куба *abcd* (*фиг.* 334), будетъ футъ или дюймъ и проч., то число 225 будетъ означать число кубическихъ футовъ или кубическихъ дюймовъ и проч. составляющихъ толстоту призмы ABCDEG.

Прибавл. I. Изъ сего удобно разумѣть можно, что толстота куба ABDEF (*фиг.* 336), равна произведенію изъ бока AB или AF самимъ собою умноженнаго два раза; ибо кубъ ABDEF есть четвеpосторонная призма, у которой всѣ три измѣренія AF, AB и BC суть равны между собою; слѣдовательно естьли положимъ, что каждое изъ тѣхъ измѣреній куба ABDEF, содержитъ въ себѣ по 5 дюймовъ; и когда вообразимъ себѣ, чтобъ кубъ сей, чрезъ точки означающія части высоты AB, разрѣжется плоскостьми параллельными основанію AKEF или BGDC, то отъ сихъ разрѣзовъ произойдетъ пять равныхъ призмъ, изъ коихъ основаніе каждой равно основанію AKEF или BGDC куба ABDF, а высота BH каждой равна одному дюй-

ту (§ 375. *Прим.* и 428). И такъ ежели бокъ AF или BC умножится самимъ собою, то произведеніе AF×AF или BC×BC=5×5=25 будетъ означать число квадратныхъ дюймовъ основанія BGDC, которое равно AKEF, или число кубическихъ дюймовъ на основаніи AKEF или BGDC поставиться могущихъ, кои составятъ толстоту одной призмы BNDG; а когда сіе число умножится числомъ помянутыхъ призмъ, или все равно числомъ дюймовъ содержащихся въ высотѣ AB, то произведеніе AF×AF×AB=25×5 =125, или все то же AF×AF×AF=125=$\overline{AF}^3$ (*), будетъ означать число кубическихъ дюймовъ, составляющихъ толстоту куба ABDF.

Прибавл. II. Изъ сего явствуетъ, когда толстота куба раздѣлится на квадратъ изъ своего бока AF или BC, то получится высота AB, то есть $\frac{AF\times AF\times AF}{AF\times AF}$=AF=AB; и что кубической корень изъ толстоты куба ABDF, равенъ каждому боку куба, то есть $\sqrt[3]{\overline{AF}^3}$=AF=AB.

Прибавл. III. Изъ того же удобно разумѣть можно, что Россійская кубическая сажень, въ разсужденіи Геометрическаго раздѣленія, содержитъ въ себѣ 1000 кубическихъ футовъ; кубической футъ 1000 кубич. дюйм. и т. д.; а въ разсужденіи обыкновеннаго раздѣленія, кубическая сажень будетъ содержать въ себѣ 7×7×7=343 кубическ. фут., кубической футъ 12×12×12=1728 кубическ. дюйм. и проч.

(*) По сей причинѣ толстота куба означается чрезъ $\overline{AF}^3$ или $\overline{AB}^3$, и притомъ выговаривается кубъ изъ линѣи AF или AB.

§ 431. ТЕОРЕМА. *Толстота всякой прямой и наклоненной призмы или цилиндра, равна произведенію изъ плоскости основанія и высоты.*

Доказ. Представимъ себѣ, что четверосторонная призма ABCDEG (*фиг.* 335), двѣ призмы ECDG (*фиг.* 331 и 332) и цилиндръ GCFE (*фиг.* 333), имѣютъ одинакое основаніе и одинакую высоту AB=EF, то всѣ оныя призмы и цилиндръ будутъ толстотою равны (§ 428). И такъ есть ли означимъ основаніе каждой изъ двухъ призмъ и цилиндра буквою P= основанію BCDH четверосторонной призмы ABCDEG; то умноживъ каждое основаніе P чрезъ высоту EF, а $\overline{BC}^2$ чрезъ AB, будетъ P×EF=$\overline{BC}^2$×AB (*Ариѳм.* § 36); но поелику $\overline{BC}^2$×AB означаетъ толстоту призмы ABDEG (§ 430); по сему и P×EF означаетъ толстоту каждаго изъ трехъ тѣлъ (*фиг.* 331, 332 и 333); слѣдовательно толстота всякой призмы и цилиндра равна произведенію изъ основанія P и высоты EF.

Слѣдств. Когда площади основаній двухъ призмъ или цилиндровъ (*фиг.* 332 и 333), будутъ въ обратномъ содержаніи ихъ высотъ, то оныя тѣла толстотою равны; ибо когда основаніе DFC : CF*m*=CG : FE, то будетъ DFC ×EF=CF*m*×CG (*Ариѳм.* § 115); но какъ первое произведеніе DFC×FE означаетъ толстоту призмы GCE; а второе CF*m*×CG толстоту цилиндра GCFE; слѣдовательно толстота призмы GCE равна толстотѣ цилиндра GCFE.

§ 432. ТЕОРЕМА. *Толстота прямыхъ и наклоненныхъ призмъ и цилиндровъ, имѣющихъ одинакую высоту, содержатся между собою какъ ихъ основанія.* Фиг. 332 и 333.

Доказ. Положимъ основаніе DCF трехсторонной призмы GCE=V, а основаніе CF*m* цилиндра CE=Q, то будетъ толстота первой =V×EF а толстота послѣдняго=Q×EF; а отсюда произойдетъ слѣдующая пропорція: V×EF:Q×EF=V:Q, то есть толстота призмы GCE, содержится къ толстотѣ цилиндра CE, какъ основаніе V или DCF призмы къ основанію Q или CF*m* цилиндра. Истинна сего видна изъ того, что въ означенной пропорціи произведенія крайнихъ Q×V×EF=произведенію среднихъ Q×V×EF (*Ариѳм.* § 116).

И обратно легко доказать можно, что толстоты призмъ и цилиндровъ, имѣющихъ равныя основанія, содер. между собою какъ ихъ высоты.

Слѣдств. Поелику толстота цилиндра ABDC вписаннаго въ четверосторонной призмѣ ACEB (*фиг* 337), содержится къ толстотѣ сей призмы, какъ площадь основанія цилиндра къ квадрату AHGB изъ діаметра AB; но какъ площадь круга основанія содержится къ квадрату изъ своего діаметра AB, по Архимедову содержанію какъ 11 къ 14, а по Меціеву какъ 355 къ 452; то изъ сего явствуетъ, что толстота цилиндра ABDC содержится къ толстотѣ призмы ACEB, около онаго описанной какъ 11:14 или какъ 355:452.

§ 433. ЗАДАЧА. ***По извѣстному боку*** CD=50′ ***и высотѣ*** EF=AB=120′ ***призмы*** GCE, ***найти толстоту оной.*** Фиг. 332.

Рѣшен. По извѣстному боку CD сыскавъ площадь треугольника DCF (§ 178), умножь оную высотою EF, то получится толстота призмы GCE (§ 431); какъ то изъ слѣдующаго

видно: сысканная плоскость △DCF=1082'.5, по сему 1082.5×120'=129900' кубическ. фут. =толстотѣ призмы GCE (§ 431).

§ 434. ЗАДАЧА. *По извѣстному діаметру CF=60' основанія, и высотѣ EF=100' цилиндра CGEF, найти толстоту онаго.* Фиг. 333.

Рѣшен. По діаметру CF, сыскавъ площадь круга CFm основанія цилиндра (§235), умножь оную высотою EF, то получится требуемая толстота цилиндра CGEF, какъ-то изъ слѣдующаго видно: сысканная площадь круга діаметра CF=2828'; по сему 2828'×100=282800 куб. фут.=толстотѣ цилиндра CGEF (§ 431).

§ 435. ЗАДАЧА. *Толстота цилиндра ADBC, у коего діаметръ основанія AB равенъ высотѣ AC, извѣстна 86893', найти діаметръ AB.* Фиг. 337.

Рѣшен. Сперва надлежитъ составить слѣдующую пропорцію: какъ 11:14 или 355:452, такъ данная толстота цилиндра ACDB, будетъ содержаться къ толстотѣ куба ACE изъ діаметра AB (§ 432. *Слѣд.*); потомъ, когда изъ найденной толстоты куба ACE=$\overline{AB}^3$ извлечется кубической корень, то оной будетъ равенъ діаметру AB (§ 430. *Приб.* 2), то есть 11:14 =86893:110591'=$\overline{AB}^2$; а по сему $\sqrt{110591}$ =48=діаметр. AB.

§ 436. ТЕОРЕМА. *Толстоты прямыхъ и наклоненныхъ пирамидъ и конусовъ, имѣющихъ равныя основанія и равныя высоты, суть равны между собою.* Фиг. 338 и 339.

Доказ. Ибо ежели представимъ себѣ, что пирамида CBDE и конусъ ADE, одинакой высоты EG, находящіяся на одной плоскости, разрѣжутся плоскостьми параллельными ихъ

основаніямъ, на безконечное число тонкихъ слоевъ толщиною въ одну только точку; то въ разсужденіи одинакой высоты предложенныхъ тѣлъ, будетъ число слоевъ пирамиды, равно числу слоевъ конуса, и притомъ каждой безконечно тонкой слой пирамиды, какъ *на прим.* *cdba*, равенъ будетъ соотвѣтствующему слою *adm* конуса, изъ коихъ каждой слой безъ всякой погрѣшности принять можно за плоскость составленную изъ безконечнаго числа тѣлесныхъ точекъ. Но какъ основаніе ACD пирамиды, подобно многоугольнику *cdb* отъ разрѣза пирамиды произшедшему (§ 375. *Прим.*), и всѣ бока перваго многоугольника параллельны сходственнымъ бокамъ послѣдняго, а потому и SD параллельна къ *rd*, то будетъ △SED подобенъ △*r*E*d* и △SEG подобенъ △*r*EF, и для того SD : *rd* = SE : *r*E = GE : FE (§ 117); изъ подобныхъ же треугольниковъ GED и FE*d* конуса, будетъ GE : FE = GD : F*d*; а для равенства содержаній сихъ пропорцій, будетъ SD : *rd* = GD : F*d*, и притомъ $\overline{SD}^2 : \overline{rd}^2 = \overline{GD}^2 : \overline{Fd}^2$ (*Ариѳм.* § 129). Но поелику плоскости подобныхъ многоугольниковъ и круговъ содержатся какъ квадраты сходственныхъ частей или радіусовъ (§ 243 и 244); то будетъ ACD : *cdb* = $\overline{SD}^2 : \overline{rd}^2$, также и площадь круга ADM : *adm* = $\overline{GD}^2 : \overline{Fd}^2$; и для равенства послѣднихъ содержаній сихъ пропорцій, будетъ ACD : *cdb* = ADM : *adm*; но поелику ACD = ADM по положенію, по сему и *cdb* = *adm* (*Ариѳм.* § 125). Такимъ же образомъ докажется, что всякой безконечно тонкой слой пирамиды, равенъ соотвѣтствующему слою конуса; но какъ

въ разсужденіи одинакой высоты означенныхъ тѣлъ, число слоевъ, составляющихъ толстоту пирамиды CADE, равно числу соотвѣтственно равныхъ слоевъ составляющихъ толстоту конуса AED; слѣдовательно толстоты сихъ тѣлъ суть равны между собою.

§ 437. ТЕОРЕМА. *Толстоты прямыхъ и наклоненныхъ пирамидъ и конусовъ, имѣющихъ равныя высоты, содержатся между собою какъ ихъ основанія.* Фиг. 338 и 339.

Доказ. Поелику мы уже въ предыдущей теоремѣ видѣли, что каждое изъ сихъ тѣлъ, въ разсужденіи ихъ равной высоты EG, состоитъ изъ одинакаго числа безмѣрно тонкихъ слоевъ, подобныхъ своимъ основаніямъ; и что всякой слой изъ составляющихъ толстоту пирамиды ACED, содержится къ соотвѣтствующему слою изъ составляющихъ толстоту конуса AED, какъ основаніе ACD перваго къ основанію ADM втораго тѣла; и такъ когда положимъ основаніе ACD пирамиды $=V$, а основаніе ADM конуса $=Q$, плоскость разрѣза $cab=x$, а плоскость круга діаметра $adm=y$, то будетъ $V:Q=x:y$; и слѣдовательно всѣ слои пирамиды съ соотвѣтствующими слоями конуса будутъ въ одинакомъ содержаніи своихъ основаній; по сей причинѣ и сумма всѣхъ слоевъ, составляющихъ толстоту пирамиды ACED, къ суммѣ всѣхъ слоевъ составляющихъ толстоту конуса AED, какъ основаніе V перваго тѣла къ основанію Q втораго тѣла (*Ариѳм.* § 131), то есть толстота пирамиды ACED, содержится къ толстотѣ конуса AED, какъ основаніе ACD къ основанію ADM.

§ 438. ТЕОРЕМА. *Толстота всякой пирамиды или конуса* BFCE, *равна произведенію изъ площади основанія* BCF *и одной трети высоты* DE. Фиг. 340.

Доказ. Ежели представимъ себѣ сдѣланной кубъ ABCE (*фиг.* 341), у котораго высота AB или бокъ BC равенъ удвоенной высотѣ DE пирамиды; то толстота сего куба будетъ состоять изъ шести равныхъ пирамидъ KBCD, AKEF и проч., коихъ верхи соединяются въ точку K, находящуюся отъ всѣхъ сторонъ куба въ равномъ разстояніи; ибо ежели кубъ ABCF разрѣжется двумя діогональными плоскостьми ABDE и FGCH, кои суть прямоугольники, то линѣя IL общаго ихъ сѣченія, проходя чрезъ центръ L и I квадратовъ BCDH и AGEF, будетъ какъ къ симъ основаніямъ, такъ и къ діогоналямъ AE и BD перпендикулярна (§ 356 и 362), и равна высотѣ AB=BC; но поелику и діогонали BF и AD прямоугольника ABDE равны, то и половины ихъ BK, EK, AK и DK суть равны между собою, а потому $\triangle BKL = \triangle AKI$, и слѣдовательно высота $KL = KI = \frac{1}{2} AB$ = высотѣ FE пирамиды или конуса BFCE; а по сему легко доказать можно, что точка K, взятая на срединѣ линѣи LI, находится отъ каждаго квадрата, составляющаго сторону куба въ равномъ разстояніи; слѣдовательно, когда изъ точки K проведутся ко всѣмъ угламъ куба линѣи, то кубъ ABCE раздѣлится на шесть равныхъ пирамидъ (§ 436), изъ коихъ основаніе каждой есть квадратъ составляющей сторону куба, и высота каждой пирамиды KBCD, KEFA и проч. будетъ = KL = высотѣ

DE пирамиды или конуса BFCE. И такъ когда BC=2ED, то толстота куба ABCE будетъ= BC×BC×BC=2ED×2ED×2ED=$8\overline{ED}^3$ (§ 430. *Приб.* 1); по сему толстота одной изъ равныхъ пирамидъ, составляющихъ толстоту куба, какъ *на прим.* KBCD, будетъ=$\frac{8\overline{ED}^3}{6}$=$\frac{4\overline{ED}^3}{3}$; но поелику толстоты пирамидъ и конусовъ, имѣющихъ равныя высоты, содержатся какъ ихъ основанія (§ 437); то (положивъ толстоту пирамиды или конуса EBFC=Q), будетъ основаніе $\overline{BC}^2$=$4\overline{ED}^2$ пирамиды KBCD, содержаться къ основанію BCF пирамиды или конуса BCEF какъ толстота KBCD, къ толстотѣ Q пирамиды или конуса BCEF, т. е. BCDH или $4\overline{ED}^2$: BCF=$\frac{4\overline{ED}^3}{3}$: Q; а когда сей пропорціи второй членъ умножится третьимъ, а потомъ раздѣлится на первой (*Ариѳм.* § 132), то выйдетъ толстота пирамиды или конуса BFCE=Q=BCF×$\frac{4\overline{ED}^3}{3}$: $4\overline{ED}^2$=BCF×$\frac{ED}{3}$ (§ 430. *Приб.* 2) =BCF×$\frac{1}{3}$ED, то есть толстота пирамиды или конуса BFCE, равна произведенію изъ площади своего основанія BCF, на одну треть высоты ED.

Слѣдств. Изъ сего удобно разумѣть можно, что всякая призма EBF втрое больше пирамиды AGCB, имѣющей съ нею равное основаніе ACB и равную высоту GD (*фиг.* 342). Ибо толстота призмы EBF равна произведенію изъ площади основанія ACB и всей высоты GD; а толстота пирамиды AGCB равна произведенію изъ того же основанія ACB и одной трети высоты GD; слѣдовательно первое произведеніе втрое больше втораго, то есть толстота призмы

втрое больше пирамиды. Тожъ должно разумѣть, что и цилиндръ AIKC (*фиг.* 327) будетъ втрое больше конуса ABC, имѣющаго съ нимъ равное основаніе и равную высоту BG.

§ 439. ЗАДАЧА. *По данному боку* $AC=30'$ *основанія* ADC *и наклоненному боку* $AB=70'$ *трехсторонной пирамиды* ABCD, *найти толстоту оной.* (Фиг. 328.

Рѣшен. По данному боку AC равносторонняго треугольника ADC, сперва сыщи радіусъ AF (§ 180. *Приб.*); потомъ по радіусу AF и наклоненному боку AB сыщи высоту BF (§ 176); а наконецъ сыскавъ площадь равносторонняго треугольника ADC, умножь оную на одну треть высоты BF, то получится толстота пирамиды ADBC, какъ-то изъ слѣдующаго видно: $70\times70=4900'=\overline{AB}^2$, $30\times30=900'=\overline{AC}^2$ и $\frac{900}{3}=300'=\frac{1}{3}\overline{AC}^2=\overline{AF}^2$, по сему $4900'-300'=4600'=\overline{AB}^2-\overline{AF}^2=\overline{BF}^2$, и $\sqrt[2]{4600'}=67.8=BF$. Сысканная площадь $\triangle ADC=389'.70$ квадр.; слѣдовательно $389.70\times\frac{67.8}{3}=\triangle ADC\times\frac{1}{3}BF=8807'.220=$ толстотѣ пирамиды ACBD.

Примѣч. Такимъ же образомъ сыщется толстота всякой пирамиды.

§ 440. ЗАДАЧА. *По извѣстному діаметру* $AD=60'$ *и наклоненному боку* $AE=100'$ *прямаго конуса* AED, *сыскать онаго толстоту.* (Фиг. 339.

Рѣшен. По радіусу AG и наклоненному боку AE сыщи высоту GE (§ 176); потомъ сыскавъ площадь круга діаметра AD, умножь оную одною третью высоты GE, то получится требуемая толстота конуса AED (§ 438); т. е. $100'\times100'=10000'=\overline{AE}^2$. $\frac{60}{2}=30'=\frac{1}{2}AD=AG$. $30'\times30'=900'=\overline{AG}^2$; по сему $10000'-900'=9100'$

$=\overline{AE}^2-\overline{AG}^2=\overline{GE}^2$ и $\sqrt[2]{9100'}=95'=EG$. Сысканная же площадь круга$=2828'$; слѣдов. $2828\times\frac{95}{3}=89553$ кубич. фут.$=$толст. конуса AED.

Слѣдств. Ежели будетъ извѣстна толстота конуса AED и высота GE, то діаметръ основанія AD сыщется; ибо раздѣляя толстоту конуса AED на одну треть высоты GE, частное будетъ равно площади круга діаметра AD; а по площади онаго найдется діаметръ AD. (§ 239).

§ 441. ЛЕММА. *Площадь прямоугольника изъ двухъ какихъ нибудь линѣй AG и AM, есть средняя Геометрическая площадь, между квадратами изъ тѣхъ же линѣй.* Фиг. 343.

Доказ. Должно доказать, что $\overline{AG}^2:AG\times AM=AG\times AM:\overline{AM}^2$. Справедливость сей пропорціи видна изъ того, что произведеніе крайнихъ $\overline{AG}^2\times\overline{AM}^2=$произведенію среднихъ $AG\times AG\times AM\times AM=\overline{AG}^2\times\overline{AM}^2$ (*Ариѳм.* § 116).

§ 441. ЗАДАЧА. *Найти среднюю Геометрическую площадь между двухъ какихъ нибудь правильныхъ многоугольниковъ, имѣющихъ одно число боковъ.* Фиг. 344.

Рѣшен. Начерти прямоугольникъ MG (*фиг.* 343), котораго бы основаніе AM было равно окружности правильнаго многоугольника BCK, а высота AG равна половинѣ высоты FH подобнаго многоугольника DEL, то оной прямоугольникъ будетъ желаемая средняя площадь между показанныхъ многоугольниковъ.

Доказ. Когда положимъ, что окружность многоугольника BCK равна $AM=x$, высота NP $=y$, окружность многоугольника $DEL=v$, а высота $FH=z$, высота AG прямоугольника GM

$=\frac{1}{2}z$; то будетъ $x:v=y:z$ (§ 151), при чемъ $x\times z=v\times y$ (*Ариѳм*. § 115); но какъ площадь многоугольника BCK$=\frac{1}{2}x\times y$, площадь многоугольника DEL$=\frac{1}{2}v\times z$ (§ 220), а площадь прямоугольника MG$=\frac{1}{2}z\times x$ (§ 160); по сей причинѣ будетъ $\frac{1}{2}x\times y:\frac{1}{2}z\times x=\frac{1}{2}z\times x:\frac{1}{2}v\times z$; ибо произвед. крайнихъ $\frac{1}{2}(x\times z\times v\times y)$ равно произведенію среднихъ $\frac{1}{2}(x\times z\times x\times z)$, потому что $v\times y=x\times z$ (доказано изъ предписанной пропорціи) и $x\times z=x\times z$; слѣдовательно прямоугольникъ MG есть средняя Геометрическая плоскость между правильными многоугольниками BCK и DEL (*Ариѳм*. § 116).

Слѣдств. Такимъ же образомъ сыщется средняя площадь между двухъ круговъ; ибо круги ничто иное, какъ правильные многоугольники, имѣющіе безконечное число боковъ. И такъ для сысканія средней площади числами, должно окружность одного многоугольника умножить половиною перпендикуляра отъ центра другаго многоугольника; а для сысканія средней площади между двухъ круговъ, окружность одного половиною радіуса другаго круга.

§ 442. ЛЕММА. *Разность двухъ кубовъ* EDGBE *и* KPLN, *равна тремъ призмамъ, изъ коихъ основаніе первой квадратъ бока большаго куба; основаніе другой есть прямоугольникъ составленной изъ боковъ большаго и меньшаго куба; основаніе третьей есть квадратъ бока меньшаго куба, а высота каждаго изъ сихъ призмъ равна разности боковъ тѣхъ же кубовъ*. (Фиг. 345.

Доказ. Положимъ, что изъ куба EDGE вырѣзанъ кубъ KPLK, коего бокъ KF=KI=FP; по сему когда чрезъ точку K разрѣжется кубъ EDGE плоскостію параллельною его сторонѣ AH или DG, то отсѣченная часть ESVE бу-

детъ призма, у которой основаніе $ABHE=$ квадрату бока AE большаго куба; а высота $EK=EF-FK$ равна разности боковъ большаго и меньшаго куба. Естьли же оставшееся тѣло $KDGK$ разрѣжется чрезъ точку L, плоскостію $ILRQ$ параллельною сторонѣ FS или CV, то отсѣченная часть $IRGI$ будетъ призма имѣющая основаніе прямоугольникъ $IQRL$ составленной изъ бока $LR=EF$ большаго куба, и бока IL меньшаго куба, а высоту $LG=FG-FL=EF-FK$ равную разности боковъ обоихъ кубовъ, и чрезъ то отдѣлится призма $ODMQ$, которой основаніе OM есть квадратъ бока меньшаго куба, а высота $DP=FD-FP=EF-KF$ равна разности боковъ тѣхъ же кубовъ; слѣдовательно сумма сихъ трехъ призмъ равна разности двухъ кубовъ $EDGE$ и $KPLN$. И такъ естьли положимъ, что большаго куба бокъ $EF=x$, меньшаго куба бокъ $KF=z$, разность боковъ сихъ кубовъ $EK=EF-KF=x-z$; то будетъ толстота первой призмы $ESVE=x^2\times(x-z)$, толстота другой $IRGI=x\times z\times(x-z)$; толстота третьей призмы $ODMQ=z^2\times(x-z)$, коихъ сумма вообще равна $x^2\times(x-z)+x\times z\times(x-z)+z^2\times(x-z)=(x^2+x\times z+z^2)\times(x-z)=x^3-z^3$, то есть равна разности кубовъ $EDGF$ и $KPLN$.

§ 443. ТЕОРЕМА. *Толстота всякой отрѣзной пирамиды или конуса* $AFHBC$, *равна произведенію изъ суммы плоскостей двухъ основаній* ABC *и* FHG *съ среднею Геометрическою плоскостью, сысканною между сихъ основаній, на одну треть высоты* ED *умноженной.* (Фиг. 346.

Доказ. Продолживъ наклоненныя бока AF, BH и проч., пока взаимно пересѣкутся въ точкѣ K, опустимъ перпендикуляры KD и FI на

основанія ABC, кои находясь въ одной плоскости ADK, будутъ перпендикулярны къ радіусамъ AD и FE (§ 355. *Слѣд.* 4), при чемъ будетъ EF=DI и ED=FI. И такъ, естьли положимъ радіусъ AD=x, FE=y, высота ED=FI=v, а содержаніе квадрата изъ радіуса къ каждой плоскости основанія какъ $r:n$, то будетъ AD−ID=AD−FE=AI=$x-y$; и для подобія треугольниковъ AFI и AKD, будетъ AI: AD=FI:DK, то есть, $x-y:x=v$:DK, откуда найдется высота DK=$\frac{x\times v}{x-y}$ (*Ариѳм.* § 132); а для подобія треугольниковъ AFI и FKE, будетъ AI:FE=IF:EK; то есть $x-y:y=v$:EK; при чемъ будетъ высота EK=$\frac{y\times v}{x-y}$; для сысканія же плоскости основанія ABC каждаго тѣла, сдѣлаемъ слѣдующую пропорцію: $r:n=\overline{AD}^2$:ABC, то есть $r:n=x^2$:ABC, а отсюда найдется плоскость основанія ABC=$\frac{n}{r}\times x^2$; и по сей же причинѣ будетъ плоскость основанія FHG=$\frac{n}{r}\times y^2$. Но поелику толстота всякой пирамиды или конуса, равна произведенію изъ основанія и одной трети высоты (§ 438); то будетъ толстота пирамиды или конуса AKBC=ABC×$\frac{1}{3}$DK $=\frac{n}{r}\times x^2\times\frac{1}{3}\left(\frac{x\times v}{x-y}\right)=\frac{n}{r}\times\frac{x^3\times v}{3(x-y)}=\frac{n}{r}\times\frac{x^3}{x-y}\times\frac{v}{3}$; а толстота пирамиды или конуса FKHG=FHG×$\frac{1}{3}$EK=$\frac{n}{r}\times y^2\times\frac{1}{3}\left(\frac{y\times v}{x-y}\right)=\frac{n}{r}\times\frac{y^3\times v}{3(x-y)}=\frac{n}{r}\times\frac{y^3}{x-y}\times\frac{v}{3}$; а когда толстота послѣдняго тѣла вычтется изъ толстоты перваго, то останется толстота отрѣзной пирамиды или конуса AFHBC=$\frac{n}{r}\times\frac{x^3}{x-y}\times\frac{v}{3}-\frac{n}{r}\times\frac{y^3}{x-y}\times\frac{v}{3}$ $=\frac{n}{r}\times\left(\frac{x^3-y^3}{x-y}\right)\times\frac{v}{3}$; но какъ по предыдущей леммѣ $x^3-y^3=(x^2+x\times y+y^2)\times(x-y)$ (*); по сему, ко-

(*) Предыдущую лемму Алгебраистамъ знать

гда каждое изъ сихъ равныхъ количествъ раздѣлится на $x-y$, а потомъ умножится чрезъ $\frac{n}{r}$ и чрезъ $\frac{v}{3}$, то будетъ $\frac{n}{r}\times\frac{x^3-y^3}{x-y}\times\frac{v}{3}=\frac{n}{r}\times(x^2+x\times y+y^2)\times\frac{v}{3}=(\frac{n}{r}\times x^2+\frac{n}{r}\times x\times y+\frac{n}{r}\times y^2)\times\frac{v}{3}=$ толстотѣ отрѣзной пирамиды или конуса AFHBC; но поелику $\frac{n}{r}\times x^2=$ плоскости основанія ABC; $\frac{n}{r}\times y^2=$ основанію FHG; а $\frac{n}{r}\times x\times y$ есть средняя Геометрическая плоскость между сими основаніями (§ 441), и $\frac{v}{3}=\frac{1}{3}$ED; слѣдовательно толстота всякой отрѣзной пирамиды или отрѣзнаго конуса, равна произведенію изъ суммы плоскостей двухъ основаній съ среднею Геометрическою плоскостью, на одну треть высоты умноженной.

§ 444. ЗАДАЧА. *Въ прямостоящей отрѣзной пирамидѣ* ACGE, *дано большаго квадрата боку* AD=80′, *меньшаго* EH=20′, *наклоненному боку* AE=120′, *найти толстоту оной*. Фиг 300.

Рѣшен. Продолжи бокъ AE, и высоту KI, пока пересѣкутся въ N, проведи EL параллельно къ KI; сыщи діогональ AC квадрата ABCD (§ 175), раздѣли оную на двѣ равныя части, частное будетъ=радіусу AI. Равнымъ образомъ сыщется и радіусъ EK; вычти EK=LI изъ AI, останется AL. Въ прямоугольномъ треугольникѣ AEL сыщи высоту EL=KI (§ 176); потомъ для подобныхъ треугольниковъ ALE и EKN, сдѣлай слѣдующую пропорцію: AL:EK =EL:KN; а для подобныхъ треугольниковъ AEL и ANI, будетъ AL:AI=LE:IN. По извѣстной площади основанія EHGF и сысканной высотѣ

не нужно; ибо когда x^3-y^3 раздѣлится на $x-y$, то частное будетъ $x^2+xxy+y^2$.

KN, сыщи толстоту пирамиды EGN, равнымъ образомъ сыщи и толстоту пирамиды ACN (§ 439); напослѣдокъ вычтя толстоту пирамиды EGN изъ толстоты пирамиды ACN, остатокъ будетъ требуемая толстота отрѣзной пирамиды ACGE.

Или сыскавъ среднюю Геометрiческую площадь между основанiями пирамиды, и сложа оную съ основанiями AC и EG вмѣстѣ, умножь сумму сихъ плоскостей одною третью высоты KI, получишь толстоту отрѣзной пирамиды ACGE (§ 443), какъ-то изъ слѣдующаго усмотрѣть можно: $80' \times 80' = 6400' = \overline{AD}^2$, и $20' \times 20' = 400' = \overline{EH}^2$. $80' \times 20' = 1600' = AD \times EH =$ средней Геом. плоск.; по сему $6400' + 400' + 1600' = 8400' =$ сум. плоск.; сысканная же высота $KI = 112'.25$; по сему $8400' \times \frac{112.25}{3} = 314300' =$ толстотѣ отрѣзн. пирамид. ACGE.

Примѣч. Сiе послѣднее рѣшенiе несравненно удобнѣе и вѣрнѣе перваго, для того, что въ первомъ рѣшенiи, при извлеченiи радиксовъ и прочихъ вычисленiй, много выпускается дробей; слѣдовательно и толстота пирамиды въ первомъ случаѣ столь совершенно найдена быть не можетъ, какъ въ послѣднемъ.

§ 445. ЗАДАЧА. *Въ прямомъ отрѣзномъ конусѣ* ABDC, *по извѣстнымъ дiаметрамъ меньшаго* CD=20′, *большаго круга* AB=50′ *и высотѣ* KI=180′, *сыскать онаго толстоту.* Фиг. 301.

Рѣшен. Продолжи ось IK и бокъ AC конуса ABDC, пока пересѣкутся въ точкѣ H, проведи CF параллельно оси IK, и CL параллельно DB. Дiаметръ CD вычти изъ AB, останется AL; потомъ для подобныхъ треугольниковъ ACL и ABH сдѣлавъ пропорцiю AL : AB = CF или

IK : HI, найдется высота HI; а для подобія треугольниковъ ACL и CHD, составя пропорцію AL : CD = CF : HK, найдется высота HK (*Ариѳм.* § 132); наконецъ сыскавъ толстоту конуса AEH, и толстоту конуса CDH (§ 440); вычти послѣднюю изъ первой, останется требуемая толстота отрѣзнаго конуса ABDC.

Или по извѣстнымъ діаметрамъ CD и AB сыскавъ площади круговъ и среднюю Геометрическую площадь между сихъ круговъ, сложи оныя площади вмѣстѣ; потомъ сумму сихъ плоскостей умножь одною третью высоты KI, то произведеніе будетъ равно толстотѣ отрѣзнаго конуса ABDC (§ 443), какъ-то изъ слѣдующаго видно: $2500 \times \frac{11}{14} = 1964'.28 = \frac{11}{14}\overline{AB}^2 =$ площад. круг. діаметр. AB; $400 \times \frac{11}{14} = 314'.28 = \frac{11}{14}\overline{CD}^2 =$ площ. круг. діам. CD; и $50 \times 20 \times \frac{11}{14} = 785'.71 = \frac{11}{14} AB \times CD =$ средней плоскости; по сему $314.28 + 1964.28 + 785.71 = 3064'.27 =$ суммѣ плоскостей; наконецъ $3064'.27 \times \frac{180}{3} = 183856'.2 =$ толстотѣ отрѣзнаго конуса ABDC.

§ 446. ТЕОРЕМА. *Толстота шара ACBD, равна произведенію изъ его поверхности и одной трети радіуса AO.* Фиг. 302.

Доказ. Поелику шаръ почитать можно за тѣло, составленное изъ неисчетнаго числа равныхъ пирамидъ Oxy, соединяющихся верхами своими въ центрѣ O, коихъ основанія xy суть безконечно малыя равныя части поверхности шара (*); то въ разсужденіи сего радіусъ ша-

(*) За основанія сихъ пирамидъ могутъ быть приняты безконечно малые между собою равные, либо равносторонніе треугольники, либо квадраты, или

ра, безъ чувствительной погрѣшности, почитать можно общею ихъ высотою; по сему толстота шара равна суммѣ толстотъ всѣхъ тѣхъ пирамидъ; но какъ толстота каждой изъ сихъ пирамидъ равна произведенію изъ ея основанія и одной трети радіуса AD (которой есть общая ихъ высота) (§ 438); слѣдовательно толстота всѣхъ тѣхъ пирамидъ вообще, то есть толстота шара равна произведенію изъ суммы основаній пирамидъ, то есть изъ цѣлой поверхности шара, и одной трети радіуса O y или AO.

Прибавл. I. Изъ сего явствуетъ, что толстота вырѣзка AECF шара AEBF (*фиг.* 303), равна произведенію изъ выпуклой поверхности онаго, и одной трети радіуса AC или EC; потому что вырѣзокъ шара также какъ и шаръ почитать можно за тѣло, составленное изъ безмѣрнаго числа пирамидъ, соединяющихся верхами своими въ центрѣ C, коихъ основанія суть безконечно малыя части его поверхности, и высота каждой равна радіусу AC; но поелику толстота каждой изъ сихъ пирамидъ равна произведенію изъ ея основанія и одной трети радіуса AC; слѣдовательно толстота всѣхъ пирамидъ, то есть толстота вырѣзка шара AECF, равна произведенію изъ суммы ихъ основаній, то есть изъ выпуклой поверхности отрѣзка; и одной трети радіуса AC.

Прибавл. II. Толстота шара ACBD (*фиг.* 302), равна также произведенію изъ площади боль-

шести-угольники; ибо только таковые правильные многоугольники могутъ имѣть своихъ боковъ по два общими, не оставляя въ соединеніи своемъ никакого междумѣстія.

шаго круга и двухъ третей діаметра AB. Ибо означивъ площадь круга діаметра CD буквою V, поверхность шара будетъ$=4V$ (§ 413. *Слѣд.* 1), которая ежели умножится чрезъ одну треть радіуса AO, или чрезъ одну шестую часть діаметра AB, то по предыдущей теоремѣ, произведеніе $4V\times\frac{1}{6}AB=\frac{4AB\times V}{6}=\frac{2}{3}AB\times V$ будетъ равно толстотѣ шара, то есть толстота шара ACBD, равна произведенію изъ двухъ третей діаметра AB, и площади большаго круга V.

Слѣдств. I. Изъ сего прибавленія удобно разумѣть можно, что толстота шара GEHF (*фиг.* 326), равна двумъ третямъ толстоты цилиндра ABDC, около онаго описаннаго; ибо когда означимъ площадь большаго круга діаметра EF или BD буквою V, то толстота цилиндра ABDC будетъ$=DC\times V=GH\times V$ (§ 431); а толстота шара GEHF будетъ$=\frac{2}{3}GH\times V$; но какъ сіе произведеніе есть двѣ трети перваго $GH\times V$; слѣдовательно толстота шара GEHF равна двумъ третямъ толстоты цилиндра ABDC. По той же самой причинѣ и толстота половины шара EFGE, равна двумъ третямъ толстоты цилиндра EFCA (*Аривм.* § 49). Слѣдовательно толстота шара GEHF содержится къ толстотѣ цилиндра ABDC какъ 2 къ 3мъ, то есть $\frac{2}{3}GH\times V : GH\times V=2:3$, потому что произведеніе крайнихъ $\frac{2}{3}GH\times V\times 3$, равно произведенію среднихъ $2GH\times V$ (*Аривм.* § 116).

Слѣдств. II. Поелику половина шара EFGE равна двумъ третямъ цилиндра AEFC; то изъ сего легко разумѣть можно, что толстота цилиндрической чашки AENGLFC, въ которой заключается полшара EGFE, равна одной тре-

ти цилиндра AEFC, и равна толстотѣ конуса АКС, которой также равенъ одной трети цилиндра AEFC (§ 438. *Слѣд.*); по сему толстота цилиндра AEFC безъ толстоты конуса АКС, равна толстотѣ полушара EFGE.

Слѣдств. III. Изъ того же явствуетъ, что толстота шара равна толстотѣ пирамиды или конуса, коего основаніе равно поверхности, а высота равна радіусу шара. Также равна толстотѣ пирамиды или конуса, коего основаніе равно площади большаго круга, а высота вдвое больше діаметра шара.

§ 447. ЗАДАЧА. *По діаметру* CD=80′, *найти толстоту шара* ACBD. Фиг. 302.

Рѣшен. По извѣстному діаметру CD сыскавъ поверхность шара (§ 414), умножь оную чрезъ одну треть радіуса OD; или сыскавъ площадь круга діаметра CD, умножь оную двумя третьми діаметра AB, то получится требуемая толстота шара (§ 446), т. е. 80′×80′= 6400=$\overline{CD}^2$, и 6400×$\frac{11}{14}$=5028.571=площ. круг. діаметр. CD. Потомъ 5028.571×4=20114.284 =поверх. шара. $\frac{80}{2}$=40=$\frac{1}{2}$CD=OD, $\frac{40}{3}$=$\frac{1}{3}$OD. Наконецъ 20114.284×$\frac{40}{3}$=268190.453=толст. шара ACBD. А по Мецієву содержанію найдется толстота шара ACBD=268082.560. Изъ сего явствуетъ, что разность между первою и послѣднею толстотою шара=107.893.

§ 448. ЗАДАЧА. *По данной хордѣ* EF=80, *и радіусу* CE=50, *найти толстоту сферическаго вырѣзка* AECF. Фиг. 303.

Рѣшен. Раздѣля хорду EF пополамъ, сыщи въ прямоугольникѣ треугольникѣ EDC высоту CD (§ 176), вычти оную изъ радіуса AC, полу-

чишь высоту AD; потомъ сыскавъ выпуклую поверхность отрѣзка EAFE (§ 416), умножь оную одною третью радіуса EC или AC, получишь толстоту вырѣзка шара AECF, какъ-то изъ слѣдующаго видно: $\frac{80}{2} = 40 = \frac{1}{2}EF = ED$; но какъ $50 \times 50 = 2500 = \overline{EC}^2$, и $40 \times 40 = 1600 = \overline{ED}^2$; по сему $2500 - 1600 = 900 = \overline{EC}^2 - \overline{ED}^2 = \overline{CD}^2$, слѣдовательно $\sqrt{900} = 30 = CD$; и $50 - 30 = 20 = AC - CD = AD$; $50 \times 2 = 100 =$ діамет. AB, и для того $7:22 = 100:314 =$ окружн. круга діам. AB; по сему $314 \times 20 = 6280 =$ поверх. част. шара EFA. Наконецъ $6280 \times \frac{50}{3} = 104666 =$ тол. вырѣз. ECFA.

§ 449. ЗАДАЧА. *По извѣстной хордѣ* EF = 80′ *и высотѣ* AG = 20′, *сыскать толстоту отрѣзка шара* AEGF. (Фиг. 304.

Рѣшен. Раздѣля хорду EF на двѣ равныя части, сыщи въ прямоугольномъ треугольникѣ AGE площадь квадрата діогонали AE (§ 175), которую раздѣля на высоту AG, получишь діаметръ AB (§ 203. *Слѣд.*); потомъ умножь площадь квадрата линѣи AE чрезъ 4, произведеніе будетъ равно площади квадрата діаметра EH; сдѣлай слѣдующую пропорцію: $14:11 = \overline{EH}^2$ къ площади круга діаметра EH (§ 238. *Приб.* 1), которая будетъ равна выпуклой поверхности отрѣзка шара (§ 415); умножь сію площадь одною третью радіуса AD, получишь толстоту сферическаго вырѣзка AEDF (§ 448); потомъ вычти высоту AG изъ радіуса AD, останется высота GD конуса EFD; напослѣдокъ по извѣстной высотѣ GD и діаметру основанія EF, сыскавъ толстоту конуса EFD (§ 440), вычти оную изъ толсто-

ты сферическаго вырѣзка AEDF, останется требуемая толстота отрѣзка EGFA, какъ-то изъ слѣдующаго видно: $\frac{80}{2} = 40 = \frac{1}{2}EF = EG$, $40 \times 40 = 1600 = \overline{EG}^2$, $20 \times 20 = 400 = \overline{AG}^2$, $1600 + 400 = 2000 = \overline{AG}^2 + \overline{EG}^2 = \overline{AE}^2$; потомъ $\frac{2000}{20} = 100 = AB$; и $2000 \times 4 = 8000 = 4\overline{AE}^2 = \overline{EH}^2$; $8000 \times \frac{11}{14} = 6285$ = плоск. круга діаметр. EH = поверхн. отрѣз. шара AEF; $6285 \times \frac{50}{3} = 104750'$ = толст. вырѣз. шара AEDF, и $50' - 20' = 30' = AD - AG = GD$ = высотѣ конуса EFD. $80' \times 80' = 6400' = \overline{EF}^2$ и $6400 \times \frac{11}{14} = 5028'$ = плоскост. круг. діаметр. EF. По сему $5028' \times \frac{30}{3} = 50280'$ = толст. кон. EDF; наконецъ $104750 - 50280 = 54470$ = толстотѣ отрѣзка шара AEGF.

§ 450. ЗАДАЧА. *По извѣстнымъ діаметрамъ* AB, CD *и* GK *и высотѣ* FH *или* EF, *найти толстоту части шара заключающейся между двухъ параллельныхъ круговъ.* Фиг. 305.

Рѣшен. I. Ежели потребно будетъ найти толстоту части шара GKDC, у которой одинъ кругъ есть большой кругъ изъ діаметра GK шара ACNB; то надлежитъ, сыскавъ площади круговъ діаметра GK и діаметра CD, площадь большаго круга діаметра GK удвоить; потомъ удвоенную плоскость сего круга сложа съ площадью круга діаметра CD, сумму ихъ умножить одною третью высоты EH, то получится толстота части шара CGKD заключающейся между двухъ параллельныхъ круговъ CD и GK.

Рѣшен. II. Когда же должно будетъ найти толстоту части шара ACDB, заключающейся между двухъ параллельныхъ круговъ AB и CD, изъ коихъ ни одинъ не проходитъ чрезъ центръ

шара; то сыскавъ площадь круга діаметра CD и діаметра AB, полсуммы плоскостей сихъ круговъ умножь высотою EF; потомъ сыскавъ толстоту шара изъ высоты EF принятой за діаметръ шара, придай толстоту онаго къ первому произведенію, то получится требуемая толстота части шара ACDB.

Истинну сихъ рѣшеній смотри въ Алгебрѣ на страницѣ 398, въ Задачѣ XIX и ея Прибавленіи.

§ 451. ЗАДАЧА. *По даннымъ діаметрамъ* EF, GH *и высотѣ* FB, *найти толстоту цилиндра* ABFE, *имѣющаго цилиндрическую пустоту* CDHG. Фиг. 347.

Рѣшен. и *Доказ.* По діаметрамъ EF и GH сыщи площади круговъ EF и GH; потомъ вычти площадь круга діаметра GH изъ площади круга діаметра EF, остатокъ будетъ означать площадь кроны P; наконецъ умножа сію плоскость высотою FB, получится требуемая толстота цилиндра ABFE, имѣющ. пустоту (§ 431).

§ 452. ЗАДАЧА. *По данному углу* ABH, 32 *град. радіусу* AB *вырѣзка круга* AGH, *и высотѣ* AC *найти толстоту вырѣзка* HABEDC *цилиндра* AGFC. Фиг. 348.

Рѣшен. Сыскавъ площадь вырѣзка ABH круга AG (§ 237), умножь оную высотою AC, получишь требуемую толстоту вырѣзка цилиндра HABEDC (§ 431).

§ 453. ЗАДАЧА. *По даннымъ радіусу* AC *меньшаго вырѣзка* ACD, *радіусу* EF *большаго вырѣзка* EFG, *углу* ACD=EFG *и наклоненному боку* AE, *сыскать толстоту вырѣзка* ADCFGE *отрѣзнаго конуса* ABKE. Фиг. 349.

Рѣшен. Продолжи бокъ EA и ось FC, пока взаимно пресѣкутся въ I. Изъ A проведи AH параллельно къ оси IF, будетъ EH=EF−HE=

EF—AC; сыщи AH (§ 176); потомъ для подобія треугольниковъ EHA, EIF и ACI сдѣлай слѣдующую пропорцію: EH:EF=AH:IF и EH:AC=AH:IC; сыщи площадь вырѣзка EFG (§ 237), умножь оную одною третью высоты IF, получишь толстоту вырѣзка EIFG конуса EKI; также сыщи и толстоту вырѣзка ADCI конуса ABI (§ 438), которую вычтя изъ толстоты перваго вырѣзка, остатокъ будетъ требуемая толстота вырѣзка DACFGE отрѣзнаго конуса ABKE.

Или сыскавъ площади вырѣзковъ EFG и ACD, умножь дугу AD вырѣзка ACD половиною радіуса EF, то сіе произведеніе будетъ средняя Геометрическая плоскость между двухъ вырѣзковъ ACD и EFH; потомъ сложа сію плоскость съ плоскостьми двухъ вырѣзокъ ACD и EFG, сумму ихъ умножь одною третью высоты CF, то получится требуемая толстота вырѣзка ADCFGE отрѣзнаго конуса ABKE (§ 443).

§ 454. ЗАДАЧА. *Изъ средины цилиндра* ABMK *вырѣзана часть* QEFHKA *и часть* PEFGXC *отрѣзнаго конуса* CDNX, *коихъ радіусы* AE, CE, XF, *градусы угла* AEQ=KFH *и высота* EF *извѣстны, сыскать толстоту оставшагося тѣла* ACPQGHKX. Фиг. 350.

Рѣшен. Сперва по § 452 сыщи толстоту вырѣзка QEFHKA цилиндра ABMK; потомъ сыщи толстоту вырѣзка PEFGXC отрѣзнаго конуса CDNX (§ 453); наконецъ вычти оную изъ толстоты вырѣзка QEFHKA, получишь требуемую толстоту тѣла.

§ 455. ЗАДАЧА. *Изъ средины отрѣзнаго конуса* ABIH *вырѣзана часть* GDLMHA *и часть* FDLONC *цилиндра* CEKN, *коихъ радіусы* AD,

CD и LH, *градусы угла* ADG=HLM *и высота* DL *извѣстны, сыскать толстоту оставшагося тѣла* GACFOMHN. Фиг. 351.

Рѣшен. Сыщи по § 453 толстоту вырѣзка GDLMHA отрѣзнаго конуса ABIH; потомъ сыщи толстоту вырѣзка FDLONC цилиндра CEKN (§ 452), вычти оную изъ толстоты вырѣзка GDLMHA, получишь требуемую толстоту тѣла GACFOMHN.

§ 456. ЗАДАЧА. *По даннымъ частямъ* AB, AD, EF *и* AF=FD=EC=EB, *сыскать толстоту призматической пирамиды* ABCEFD. Фиг. 352.

Рѣшен. Представимъ себѣ, что пирамида ABCEFD, чрезъ точки E и F разрѣжется плоскостьми перпендикулярными къ основанiю AC, то чрезъ сiе отдѣлятся три тѣла; трехсторонная призма GHLKEF, имѣющая основанiе треугольника HGF или LKE, а высоту EF, и двѣ равныя пирамиды AHGFD и LBCEK, коихъ основанiя суть равные прямоугольники AG и LC, а высота FN=EM. И такъ для разрѣшенiя требуемаго, сыщи высоту FG или FH трапецiи DCEF или ABEF (§ 193); потомъ по извѣстнымъ бокамъ HG=AD, HF=FG, равнобедреннаго треугольнака HFG, сыскавъ площадь (§ 191), умножь оную высотою EF или GK, произведенiе будетъ равно толстотѣ призмы GHLKEF (§ 431); вычти EF изъ DC, останется DG+KC. Сей остатокъ раздѣли на двѣ равныя части, частное будетъ=DG=KC; но какъ треугольника HFG или LEK сысканная высота FN или EM есть высота пирамиды AHGFD или LBCEK, то по извѣстнымъ AH и HG основанiя AG и высотѣ FN, сыщи толстоту пирамиды

AHGFD (§ 438), которая будетъ равна толстотѣ пирамиды LBCEK; и напослѣдокъ всѣ оныя толстоты сложа вмѣстѣ, получишь требуемую толстоту призматической пирамиды ABCEFD.

§ 457. ЗАДАЧА. *По даннымъ частямъ AB, BC, HF, EF и FB=AH=GD=EC, параллелограмнаго пруда HABCEFGD, сыскать число кубическихъ саженъ вынутой земли.* Фиг. 353.

Рѣшен. Представимъ себѣ, что сіе тѣло разрѣжется плоскостьми по линѣѣ EF и GH перпендикулярными къ плоскости ABCD, то оное разсѣчется на три тѣла, изъ коихъ одного будетъ призма IKEFHMNG, имѣющая основаніе трапеціи EFIK или GHMN и высоту GE; а другія два тѣла призматическія пирамиды CBIFEK и NMAHGD, коихъ основанія суть равные прямоугольники BCKI и MNDA, а высота каждой равна высотѣ FO или LH трапеціи IKEF или MNGH. И такъ для изслѣдованія желаемаго, будетъ AB−MI=AB−HF=AM+BI и AM=IB. Сыщи въ трапеціи AF высоту FI, которая будетъ=HM=GN=EK, и по извѣстнымъ бокамъ KI, EF и IF=KE сыскавъ площадь трапеціи IKEF, умножь высотою GE, то произведеніе будетъ равно толстотѣ призмы IKEFHGNM (§ 431); наконецъ по извѣстнымъ бокамъ BI, BC, BF=EC, IF=EK посредствомъ предыдущей задачи сыщи толстоту призматической пирамиды CBIFEK, и умножа оную чрезъ 2, получишь толстоту двухъ равныхъ призматическихъ пирамидъ, CBIFEK+NMAHGD; наконецъ сложа всѣ оныя толстоты вмѣстѣ, получишь требуемую толстоту параллелограмнаго пруда HABCFEGD въ кубическихъ саженяхъ.

§ 458. ЗАДАЧА. *По даннымъ діаметрамъ KF и LE сыскать толстоту круглаго кольца KNFM.* Фиг. 354.

Рѣшен. Изъ радіуса GF вычти радіусъ GE, получишь діаметръ EF. Сыщи площадь круга діаметра EF (§ 235); потомъ сыскавъ окружности круговъ діаметра KF и діаметра LE, умножь полсуммою сихъ окружностей площадь круга діаметра EF, получишь требуемую толстоту кольца.

Доказ. Ежели кольцо разрѣжется плоскостію перпендикулярною къ его поверхности, то сѣченіе будетъ кругъ EF. И такъ когда представимъ себѣ, что радіусъ GF съ имѣющимся на концѣ его кругомъ EF сдѣлаетъ цѣлое обращеніе около одного своего конца неподвижно пребывающаго въ точкѣ G; то въ такомъ случаѣ, отъ обращенія круга EF, произойдетъ круглое кольцо FNKM, и во время сего обращенія каждая линѣя изъ составляющихъ плоскость круга, опишетъ круглую поверхность или безмѣрно тонкой слой кольца; но какъ радіусы сихъ безмѣрно тонкихъ слоевъ одинъ другаго превосходятъ одинакимъ количествомъ, слѣдственно составляютъ Ариѳметическую прогрессію; но окружности круговъ содержатся какъ радіусы (§ 152. *Слѣд.*), по сей причинѣ и окружности безмѣрно тонкихъ слоевъ, составляющихъ толстоту кольца, будутъ въ Ариѳметической прогрессіи, у которой первый членъ есть окружность круга радіуса GE, а послѣдній окружность круга радіуса GF, число же сихъ членовъ, то есть число слоевъ кольца, равно числу линѣй опре-

дѣляющихъ площадь круга EF; но полсуммы наружныхъ членовъ умноженная числомъ членовъ, равна суммѣ прогрессіи (*Ариѳм.* § 170); слѣдовательно площадь круга діаметра EF, умноженная полсуммою двухъ окружностей круговъ діаметра KF и діаметра LE, равна толстотѣ круглаго кольца OP.

§ 459. ТЕОРЕМА. *Толстота всякаго правильнаго тѣла, равна произведенію изъ цѣлой поверхности и одной трети перпендикуляра, изъ центра тѣла на одну его сторону или грань опущеннаго.* Фиг. 307, 308, 309.

Доказ. Поелику около всякаго правильнаго тѣла опишется шаръ, и когда изъ центра онаго ко всѣмъ угламъ проведутся радіусы BK, KH, KC и проч. (*фиг.* 309); то оное тѣло раздѣлится на столько равныхъ пирамидъ, сколько оно сторонъ имѣетъ; потому что основанія ихъ суть равныя плоскости ограничивающія тѣло, а высоты суть равные перпендикуляры, изъ центра на каждое основаніе пирамиды опущенные; по сему оныя пирамиды суть равны между собою (§ 436); но толстота каждой пирамиды CBHK равна произведенію изъ основанія BCH и одной трети высоты KM; слѣдовательно толстота всѣхъ пирамидъ, составляющихъ толстоту правильнаго тѣла, равна произведенію изъ цѣлой его поверхности и одной трети перпендикуляра KM, изъ центра тѣла, на одну сторону опущеннаго.

Примѣч. Поелику сыскиваніе толстоты правильныхъ тѣлъ (*фиг.* 308 и 309) почти никогда и ни въ какомъ употребительномъ случаѣ не встрѣчается; то какимъ образомъ по извѣстному боку толстота каж-

даго изъ сихъ тѣлъ находится, я не нахожу нужды прилагать здѣсь относительныхъ къ сему случаю правилъ.

О содержаніяхъ толстоты тѣлъ.

§ 460. ТЕОРЕМА. *Толстота шара Q содержится къ толстотѣ куба изъ діаметра AB, какъ окружность большаго круга къ шести діаметрамъ AB; или по содержанію Архимедову какъ 11:91, а по Мецієву какъ 355:678.* Фиг. 329.

Доказ. Положимъ, окружность большаго круга діаметра AB $= x$, то будетъ толстота шара равна произведенію изъ поверхности (которая $= AB \times x$) (§ 413) и одной трети радіуса AD, или одной шестой части діаметра AB (§ 446), то есть $Q = AB \times x \times \frac{1}{6} AB = \frac{1}{6} \overline{AB}^2 \times x$; и для того будетъ толстота шара Q или $\frac{1}{6} \overline{AB}^2 \times x : \overline{AB}^3 = x : 6AB$, то есть толстота шара Q содержится къ толстотѣ куба изъ діаметра AB, какъ окружность x къ шести діаметрамъ AB. Истинна сія видна изъ того, что произведеніе крайнихъ $6AB \times \frac{1}{6} \overline{AB}^2 \times x$ равно произведенію среднихъ $\overline{AB}^3 \times x$ (*Ариѳм.* § 116). Но поелику $x : 6AB = 22 : 7 \times 6 = 22 : 42 = 11 : 21$ по Архимедову содержанію; также $x : 6AB = 355 : 113 \times 6 = 355 : 678$, по Мецієву содержанію (§ 234. *Приб.*); то для равенства содержаній сихъ пропорцій съ первою будетъ толстота шара $Q : \overline{AB}^3 = 11 : 21$ по Архимедову содержарію, и $Q : \overline{AB}^3 = 355 : 678$ по Мецієву содержанію.

Прибавл. Основываясь на семъ предложеніи, несравненно удобнѣе, по извѣстному діаметру AB, сыскана быть можетъ толстота

шара Q чрезъ слѣдующую пропорцію: $21:11 = \overline{AB}^3 : Q$ (*Ариѳм.* § 117); при чемъ будетъ $\frac{11}{21}\overline{AB}^3 = Q$ (*Ариѳм.* § 132), то есть, когда діаметръ AB шара Q, умножится кубично, и чрезъ $\frac{11}{21}$, то получится толстота шара Q.

§ 461. ЗАДАЧА. *По данной толстотѣ* $Q = 17600'$, *найти діаметръ* AB. (Фиг. 329.

Рѣшен. Сдѣлавъ пропорцію, какъ $11:21$, такъ толстота шара Q содержится къ толстотѣ куба изъ діаметра AB; потомъ изъ найденной толстоты куба извлеки кубической корень, то получится діаметръ AB, то есть $11:21 = 17600' : 33600' = \overline{AB}^3$, и $\sqrt[3]{33600'} = 32'.2$ = діаметру AB.

§ 462. ТЕОРЕМА. *Толстоты шаровъ Q и q, содержатся между собою какъ кубы изъ ихъ діаметровъ AB и ab, или изъ радіусовъ AD и ad.* (Ф. 329.

Доказ. Поелику толстота шара $Q : \overline{AB}^3 = 11:21$, или какъ $355:678$, также и толстота шара $q : \overline{ab}^3 = 11:21$ или $355:678$ (§ 460); то для равенства содержаній будетъ $Q : \overline{AB}^3 = q : \overline{ab}^3$, а отсюда произойдетъ пропорція $Q : q = \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$ (*Ариѳм.* § 117), то есть, толстоты шаровъ Q и q содержатся между собою какъ кубы изъ ихъ діаметровъ AB и *ab*. Но поелику $AB : ab = AD : ad$ (*Ариѳм.* § 121. *Слѣд*), то будетъ и $\overline{AB}^3 : \overline{ab}^3 = \overline{AD}^3 : \overline{ad}^3$ (*Ариѳм.* § 129); а для равенства содержаній сей пропорціи съ предыдущею, будетъ $Q : q = \overline{AD}^3 : \overline{ad}^3$, то есть толстоты шаровъ какъ кубы изъ ихъ радіусовъ.

§ 463. ТЕОРЕМА. *Толстоты подобныхъ тѣлъ вообще содержатся между собою какъ кубы изъ*

сходственныхъ боковъ или сходственныхъ измѣреній.

Доказ. Ежели представимъ себѣ двѣ подобныя пирамиды ADCB и *adcb* (*фиг.* 328), то въ разсужденіи подобныхъ плоскостей, окружающихъ оныя тѣла, будетъ $\triangle ADC : \triangle adc = \overline{AD}^2 : \overline{ad}^2$ (§ 173); но какъ для подобія оныхъ тѣлъ $BF : bf = AD : ad$, то умноживъ члены первой пропорціи членами второй, будетъ $\triangle ADC \times BF : \triangle adc \times bf = \overline{AD}^3 : \overline{ad}^3$; а по раздѣленіи членовъ перваго содержанія на 3, выйдетъ $\triangle ADC \times \frac{1}{3} BF : \triangle adc \times \frac{1}{3} bf = \overline{AD}^3 : \overline{ad}^3$. Но поелику $AD : ad = AB : ab$ и притомъ $\overline{AD}^3 : \overline{ad}^3 = \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$ (*Ариѳм.* § 129), то для равенства содержаній будетъ $\triangle ADC \times \frac{1}{3} BF : \triangle adc \times \frac{1}{3} bf = \overline{AD}^3 : \overline{ad}^3 = \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$, то есть толстоты подобныхъ пирамидъ ADCB и *adcb* содержатся между собою, какъ кубы сходственныхъ измѣреній.

Естьли же представимъ себѣ два подобныхъ цилиндра AIKC и *aikc* (*фиг.* 327), у коихъ всѣ сходственныя измѣренія суть пропорціональны, то есть $AI : ai = AC : ac$; то положивъ площадь круга діаметра $AC = x$, а площадь круга діаметра, $ac = y$, будетъ $x : y = \overline{AC}^2 : \overline{ac}^2$, а по умноженіи членовъ первой пропорціи членами послѣдней, будетъ $AI \times x : ai \times y = \overline{AC}^3 : \overline{ac}^3$; но когда $AC : ac = AI : ai$, то будетъ и $\overline{AC}^3 : \overline{ac}^3 = \overline{AI}^3 : \overline{ai}^3$; и для равенства содержаній будетъ $AI \times x : ai \times y = \overline{AC}^3 : \overline{ac}^3 = \overline{AI}^3 : \overline{ai}^3$; то есть толстоты подобныхъ цилиндровъ AIKC и *aikc*, содержатся между собою какъ кубы сходственныхъ измѣреній. Но поелику конусы ABC и *abc* суть подобны между собою, и толстота каждаго равна одной

трети своего цилиндра, то по раздѣленіи членовъ перваго содержанія на 3, выдетъ $\frac{1}{3}AIxx$: $\frac{1}{3}aixy = \overline{AC}^3 : \overline{ac}^3 = \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$ (потому что $AC : ac = AB : ab$, то будетъ и $\overline{AC}^3 : \overline{ac}^3 = \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$), то есть толстоты подобныхъ конусовъ ABC и *abc* содержатся между собою, какъ кубы сходственныхъ измѣреній.

Такимъ же порядкомъ докажется, что толстоты двухъ какихъ нибудь подобныхъ тѣлъ содержатся между собою какъ кубы сходственныхъ боковъ, или сходственныхъ частей ихъ измѣреній.

Прибавл. Изъ предыдущихъ двухъ теоремъ удобно можно видѣть, что ежели кубъ изъ какого нибудь бока предложеннаго тѣла, будетъ вдвое или втрое больше куба изъ сходственнаго бока другаго подобнаго тѣла, то и толстота перваго тѣла будетъ вдвое или втрое больше толстоты другаго подобнаго тѣла.

§ 464. ЗАДАЧА. *По извѣстной толстотѣ четвеԝосторонной призмы* HDFE=14000′, *и содержанію высоты* HD *къ боку* DF *основанія* DCF *какъ* 7:4, *найти высоту* HD *и бокъ* DF. (Фиг. 290.

Рѣшен. Поелику содержаніе 7:4 означаетъ, что высота DH содержитъ въ себѣ 7 такихъ равныхъ частей, каковыхъ бокъ DF основанія DCF имѣетъ въ себѣ 4; по сей причинѣ, ежели представимъ себѣ, что призма HDFE разрѣжется плоскостію MN, параллельною къ основанію DCF, такъ что будетъ DF=DM, то отсѣченная часть MDFN призмы HDFE будетъ кубъ (§ 365. *Приб.* 2); но поелику толстоты призмъ, имѣющихъ одинакое основаніе, содержатся между собою какъ высоты (§ 432);

и для того сдѣлавъ пропорцію: какъ высота HD содержится къ DM или DF, то есть какъ 7:4, такъ данная толстота призмы HDFE будетъ содержаться къ толстотѣ куба MDFN; потомъ когда изъ найденной толстоты куба $MDFN = \overline{DF}^3$ извлечется кубической корень, то получится величина бока DF (§ 430. *Приб.* 2); наконецъ чрезъ слѣдующую пропорцію: 4:7 = DF:DH, найдется высота DH, какъ-то изъ слѣдующаго видно: $7:4 = 14000':8000' = \overline{DF}^3$; потомъ $\sqrt[3]{8000'} = 20' = DF$; наконецъ 4:7 = 20':35' = высотѣ DH.

§ 465. ЗАДАЧА. *По извѣстной толстотѣ конуса* ABC = 17645.833, *и содержанію высоты* BG *къ діаметру* AC *основанія, какъ* 11:7, *найти высоту* BG *и діаметръ* AC. Фиг. 327.

Рѣшен. Сперва надлежитъ данную толстоту конуса умножить чрезъ 3, то получится толстота цилиндра AIKC (§ 438. *Слѣд.*); потомъ вообразить себѣ, что цилиндръ AIKC разрѣзанъ плоскостію MN параллельно къ основанію, такъ что будетъ AC = AM; то отъ сего произойдетъ цилиндръ ACNM, у коего высота AM равна діаметру AC, котораго толстота сыщется чрезъ слѣдующую пропорцію: AI:AM или 11:7 = AIKC:ACNM; потомъ по найденной толстотѣ сего цилиндра сыщется діаметръ AC (§ 435); наконецъ чрезъ слѣдующую пропорцію: 7:11 = AC:BG найдется высота BG; какъ-то изъ слѣдующаго усмотрѣть можно: 17645.833×3 = 52937.499 = толстот. цилиндр. AIKC; потомъ 11:7 = 52937.499: 33687.499 = толст. цилинд. ACNM; и 11:14 = 33687.499:42874.998 = толстот. куба изъ

діаметр. $AC = \overline{AC}^{3}$ (§ 435); по сему $\sqrt[3]{42874 \cdot 998} = 35 = AC$, наконецъ $7:11 = 35:55 =$ высотѣ BG конуса ABC.

Примѣч. Ежели должно будетъ, по извѣстной толстотѣ пирамиды ABCD и содержанію боковъ AC къ $AB = 4:7$ (*фиг* 328), найти величину тѣхъ боковъ; то надлежитъ представить себѣ подобную пирамиду *abcd*, у которой бокъ *ac* имѣетъ 4, а бокъ *ab*, 7 равныхъ частей; потомъ по симъ извѣстнымъ частямъ сыскавъ толстоту пирамиды *abcd*, составить пропорцію: какъ сысканная толстота пирамиды *abcd*, содержится къ толстотѣ данной пирамиды ABCD, такъ кубъ изъ бока *ac* будетъ содержаться къ толстотѣ куба изъ бока AC (§ 463), котораго кубической корень будетъ означать величину бока AC; а наконецъ чрезъ пропорцію $4:7 = AC:AB$ найдется величина бока AB. То же самое должно разумѣть и о другихъ данныхъ тѣлахъ.

§ 466. ТЕОРЕМА. *Толстота шара* AHBM *діаметра* AB, *содержится къ толстотѣ, описаннаго около равнобочнаго конуса* SQR, *какъ* 4:9. Ф. 330.

Доказ. Поелику въ § 425 уже доказано, что площадь круга діаметра QR, втрое больше площади большаго круга діаметра AB, и радіусъ $OM = \frac{1}{2}OQ = \frac{1}{2}OS = \frac{1}{3}MS$, то положивъ $OM = x$, площадь большаго круга діаметра $AB = y$, будетъ площадь круга діаметра $QR = 3y$, а высота MS конуса $QRS = 3OM = 3x$; по сему толстота конуса $QRS = 3y \times \frac{1}{3}MS = 3yxx$ (§ 438); а толстота шара $AHBM = 4y \times \frac{1}{3}OM = 4y \times \frac{x}{3} = \frac{4y \times x}{3}$; и слѣдовательно $\frac{4y \times x}{3} : 3yxx = 4:9$, т. е. толстота шара AHBM, содержится къ толстотѣ конуса QRS какъ 4:9. Ибо истинна сего видна изъ того, что произведеніе крайнихъ членовъ

$\frac{4yxx}{3} \times 9$, равно произведенію среднихъ $3yxx \times 4 = 12yxx$ (*Ариѳм.* § 116).

Примѣч. Поелику въ § 446. *Слѣд.* I. уже доказано, что толстота шара AHBM содержится къ толстотѣ цилиндра CDFE какъ 2:3 или какъ 4:6; теперь же доказано, что толстота шара AHBM къ толстотѣ конуса QRS = 4:9; слѣдовательно толстоты сихъ трехъ состоятъ въ непрерывной пропорціи, то есть AHBM : CDFE : QRS = ∺ 4 : 6 : 9.

§ 467. ЗАДАЧА. *Найти діаметръ шара, котораго бы толстота равна была толстотѣ даннаго тѣла A, окружающагося кривою поверхностію.* Фиг. 355.

Рѣшен. Положа данное тѣло A въ цилиндрической пустой сосудъ ADCB, налей въ него воды, или насыпь мѣлкаго песку, такъ чтобы тѣло A водою или пескомъ нѣсколько покрылось; и ежели песокъ, то надлежитъ поверхность EF онаго сравнять параллельно основанію AB; потомъ замѣтя поверхность воды или песку точками E и F, вынь изъ сосуда тѣло A, и дай время съ него водѣ стечь, или песку ссыпаться; потомъ по сравненіи песка какъ сказано, или по стеченіи воды, вымѣряй по Геометрическому размѣру высоту EG и FH до поверхности осѣвшаго песку или воды; то будетъ толстота цилиндра EGHF равна толстотѣ даннаго тѣла A, и равна толстотѣ такого шара, котораго требуется найти діаметръ; ибо по вынутіи изъ сосуда тѣла A, столько осталось пустаго пространства EGHF, сколько тѣло въ водѣ или въ пескѣ мѣста занимало; и такъ вымѣрявъ діаметръ GH потомужъ размѣру, по извѣстной величинѣ онаго и высотѣ EG, сыщется толстота цилиндра EGHF

(§ 434), которой равенъ будетъ толстотѣ шара требуемаго діаметра; а наконецъ по извѣстной толстотѣ сего шара найдется требуемой діаметръ (§ 461).

Примѣч. Ежели потребно будетъ найти толстоту такого тѣла, котораго съ мѣста снять не можно, какъ *на прим.* статуи или другихъ подобныхъ сему случаю тѣлъ: то надлежитъ сдѣлать около онаго ящикъ, въ коемъ бы песокъ держаться могъ; потомъ взявъ сосудъ, которой бы содержалъ въ себѣ мѣру кубическаго фута или дюйма, насыпай посредствомъ онаго сдѣланной около статуи ящикъ пескомъ, до тѣхъ поръ, пока статуя засыпана будетъ, считая притомъ, сколько тѣхъ мѣръ въ томъ сосудъ всыпано будетъ; потомъ сравнявъ поверхность песку горизонтально, вымѣряй длину, ширину и высоту ящика, содержащаго въ себѣ песокъ и статую, и по симъ извѣстнымъ измѣреніямъ сыщи толстоту онаго въ кубическихъ футахъ или дюймахъ; а наконецъ вычтя изъ найденной толстоты число кубическихъ футовъ или дюймовъ всыпаннаго песку въ ящикъ, останется толстота данной статуи, или другаго какого тѣла.

§ 468. *Опредѣл.* Ежели половина ACBA эллиса ACBD, сдѣлаетъ цѣлое обращеніе около своей оси AB, то произшедшее отъ сего тѣла ADBCA, называется *Эллипсоидъ* или *оvалъ*. Фиг. 356.

§ 469. ТЕОРЕМА. *Толстота овала* ADBCA, *равна произведенію изъ площади круга меньшой оси* CD *и двухъ третей большой оси* AB. (ф). 356.

Доказ. Поелику полупоперешники EC, FL, MG и проч. составляющіе плоскость полуэллипсиса ACB, при обращеніи онаго около своей оси AB, опишутъ круги, коихъ число будетъ рав-

по числу точекъ, составляющихъ ось AB полуэллипсиса ACB, слѣдственно неисчетное число сихъ круговъ составятъ толстоту эллипсоида ACBD; также и сходственные полупоперешники FH, FI, GK и проч., составляющіе плоскость полукруга AHB, опишутъ такоежъ количество круговъ, составляющихъ толстоту шара AHBN; но поелику полупоперешники EC, FL, GM и проч. эллипсиса ACBD содержатся какъ полупоперешники EH, FI, GK и проч. круга AHBN, то есть $EC:EH=FL:FI=GM:GK$ и проч. (§ 258), то будетъ и $\overline{EC}^2:\overline{EH}^2=\overline{FL}^2:\overline{FI}^2=\overline{GM}^2:\overline{GK}^2$ и проч. (*Ариѳм.* § 129); площади же круговъ содержатся между собою какъ квадраты радіусовъ; по сей причинѣ (положивъ площадь круга радіуса $EC=x$, $FL=y$, $GM=z$ и проч., площадь круга радіуса $EH=v$, $FI=q$, $GK=r$ и проч.), будетъ $x:v=\overline{EC}^2:\overline{EH}^2$, $y:q=\overline{FL}^2:\overline{FI}^2$, $z:r=\overline{GM}^2:\overline{GK}^2$ и проч., и для равенства содержаній будетъ $x:v=y:q=z:r$ и проч.; по сему $x+y+z+$ и проч.: $v+q+r+$ и проч. $=x:v$ (*Ариѳм.* § 131); а умножа члены перваго содержанія чрезъ 2, члены втораго содержанія чрезъ $\frac{2}{3}AB$, будетъ $(x+y+z+$ и проч.$)\times 2:(v+q+r+$ и проч.$)\times 2=\frac{2}{3}AB\times x:\frac{2}{3}AB\times v$ (§ *Ариѳм.* 122.); но какъ $(v+q+r+$ и проч.$)\times 2=$ суммѣ круговъ составляющихъ толстоту шара $AHBN=\frac{2}{3}AB\times v$; по сему и сумма круговъ $(x+y+z+$ и проч.$)\times 2$ составляющихъ толстоту эллипсоида $ACBD=\frac{2}{3}AB\times x$ (*Ариѳм.* § 125), то есть толстота эллипсоида равна произведенію изъ площади круга x меньшой оси CD и двухъ третей большой оси AB.

Изъ сего явствуетъ, что для сысканія тол-

стоты эллипсоида по извѣстнымъ осямъ AB и CD, должно сперва найти площадь круга меньшой оси CD, а потомъ умножь оную чрезъ двѣ трети большой оси AB.

§ 470. ЗАДАЧА. *Сдѣлать Пифометрическую трость, посредствомъ которой сыскивается число ведръ или кружекъ въ какомъ нибудь цилиндрическомъ сосудѣ жидкаго тѣла, на прим. пива, вина и проч.*

Рѣшен. Сперва должно найти по приложенной при семъ таблицѣ (*) діаметръ CD основанія, и высоту AC цилиндра CB (*фиг.* 357), въ которой бы входило жидкаго вещества на прим. ведро или кружка, слѣдующимъ образомъ: принявъ изъ таблицы число кубическихъ дюймовъ ведра или кружки за толстоту цилиндра ABDC, коего діаметръ CD къ высотѣ AC долженъ содержаться *на прим.* какъ 2:3, сыщи по § 465 діаметръ CD и высоту AC онаго; потомъ на концѣ произвольно проведенной линѣи AC (*фиг.* 358) поставь перпендикуляръ AB=діаметру CD (*фиг.* 357), сдѣлай A1=AB, проведи B1 (*фиг.* 358.), то оная будетъ=діаметру двойной мѣры одинакой высоты съ цилиндромъ; положи A2=B1, то будетъ B2=A3 діаметръ тройной мѣры той же высоты. Подобнымъ образомъ найдутся діаметры A4, A5, A6, A7, и проч. четверной, пятерной и шестер-

(*) *Мѣра употребляемая при измѣреніи жидкихъ тѣлъ:* Россійск. кубич. дюймовъ:

кружка или осмуха содержитъ въ себѣ	94.319
четверть	188.638
полведра	377.286
ведро	754.552

ной мѣры и далѣе; наконецъ взявъ сдѣланной изъ крѣпкаго дерева брусокъ AC, на одну его сторону перенеси всѣ тѣ раздѣленію A1, A2, A3, A4 и проч., означь оныя числами 1, 2, 3, 4 и проч.; а на другой его бокъ перенеси высоту DB цилиндра ABDC столько разъ, сколько оныхъ на брускѣ помѣститься можетъ, которыя также означь числами, получишь требуемую Пифометрическую трость.

Доказ. Ибо когда $\overline{AB}^2+\overline{A1}^2=\overline{B1}^2$ (§ 174), и притомъ AB=AI, то будетъ $\overline{B1}^2=\overline{A2}^2$ вдвое больше $\overline{AB}^2$; равнымъ образомъ $\overline{B2}^2=\overline{A3}^2$ втрое больше $\overline{AB}^2$, и квадратъ линѣи B3=$\overline{A4}^2$ вчетверо больше $\overline{AB}^2$ и такъ далѣе; но поелику плоскости круговъ содержатся между собою какъ квадраты діаметровъ (§ 244); то будетъ A2 діаметръ двойнаго круга, A3 діаметръ тройнаго, A4 діаметръ четвернаго круга и проч.; толстоты же цилиндровъ одной высоты и такой, какъ мѣра ABDC (*фиг.* 357), содержатся какъ ихъ основанія (§ 432); слѣдовательно когда линѣя AB=A1 есть діаметръ круга одномѣрнаго сосуда, то будетъ A2 діаметръ круга двумѣрнаго сосуда, A3 діаметръ основанія сосуда въ три мѣры и такъ далѣе; слѣдовательно ежели трость тою стороною, на которой назначены діаметры, приложится къ діаметру какого нибудь цилиндрическаго сосуда, то будетъ извѣстно, сколько потребно такихъ мѣръ какъ ABDC, чтобы налить его до тѣхъ мѣстъ, какъ высока мѣра ABDC; потомъ приложа трость къ длинѣ даннаго сосуда другою его стороною, на которой высота DB мѣры назначена; найденное на

оной число умножь числомЪ означающимЪ діаметрЪ вымѣреннаго основанія, получишь число мѣрЪ вЪ данной сосудЪ входящее.

§ 471. ЗАДАЧА. *Сыскать толстоту бочки* ABHG *и узнать, сколько вЪ оную входитЪ данной величины мѣрЪ.* (Фиг. 359.

Рѣшен. Вымѣряй посредствомЪ дюймовЪ длину бочки EF, діаметрЪ дна AB, и діаметрЪ CD у впулки, гдѣ обыкновенно бываетЪ шире; но какЪ бочка отЪ жерла на обѣ стороны дѣлается уже, то можно ея почесть (какЪ опыты увѣряютЪ, хотя Геометрически доказать и не можно) за цилиндрЪ, котораго основаніе есть кругЪ равной полсуммѣ круговЪ AB и CD. И такЪ по извѣстнымЪ діаметрамЪ AB и CD сыщи площади круговЪ діаметровЪ AB и CD (§ 238. *Приб.* 2); потомЪ полсуммы сихЪ плоскостей умножь длиною бочки EF, то получится толстота оной вЪ кубическихЪ дюймахЪ; число сихЪ дюймовЪ раздѣли на число кубическихЪ дюймовЪ, составляющихЪ толстоту ведра или кружки, получишь число ведрЪ или кружекЪ вЪ бочку входящее. *На прим.* положимЪ AB=36′, CD=44′, EF=90′; будетЪ площадь круга AB=1018.28; площадь круга CD=1521.14; сумма же ихЪ=2539′.42. $\frac{2539.42}{2}$=1269′.71=полсуммѣ круговЪ цилиндра, толстотою равнаго бочкѣ; и 1269′.71×90′=114271′.390=толстотѣ бочки; но какЪ 754′.552=толстотѣ ведра, то будетЪ $\frac{114271.390}{754.552}$=15 ведр. 1 круж. содержащихся вЪ бочкѣ.

ЗАДАЧА. *ПосредствомЪ Пифометрической трости узнать число мѣрЪ бочки* ABHG. (Ф. 359.

Рѣшен. ВзявЪ Пифометрическую трость

(*фиг.* 358), и тою ея стороною, на которой назначены поперешники ведра или кружки, вымѣряй діаметрѣ дна AB и среднеи діаметрѣ CD у втулки; потомѣ числа означающія плоскости круговѣ діаметра AB и CD сложа вмѣстѣ, сумму ихѣ раздѣли пополамѣ, получишь основаніе цилиндра, толстотою равнаго бочкѣ; напослѣдокѣ другою стороною Пифометрической трости, на которой назначены высоты ведра или кружки, вымѣрявѣ длину бочки EF, умножь оную половиною суммы круговѣ AB и CD, то произведеніе покажетѣ число ведрѣ или кружекѣ, содержащихся вѣ цѣлой бочкѣ. *На прим.* положимѣ что вымѣренная площадь діаметра AB равна 9, площадь діаметра CD равна 13, а длина AB равна 16, то будетѣ сумма площадей діаметровѣ $=13+9=22$, а полсуммы ихѣ $=\frac{22}{2}=11$; по сему $11\times16=176=$ числу мѣрѣ.

О превращеніи тѣлѣ.

§ 472. ЗАДАЧА. *Между двухѣ данныхѣ линѣй a и b найти двѣ среднія пропорціональныя линѣи непрерывной Геометрической пропорціи.* Фиг. 360.

Рѣшен. Изѣ данныхѣ линѣй *a* и *b* сдѣлай прямоугольникѣ *he* (§ 90), продолжи *ed* и *eg* неопредѣленно, проведи діогонали *dg* и *he*, изѣ точки *i* взаимнаго ихѣ сѣченія описывай кругѣ до тѣхѣ порѣ, пока три точки *c*, *h* и *k* будутѣ вѣ прямой линѣи; тогда линѣи *cd* и *gk* будутѣ требуемыя среднія пропорціональныя линѣи между *dh* и *hg*, или между *a* и *b*.

Доказ. Продолжи *ce* и *ek* до *f* и *n*, проведи *nf*; спусти перпендикуляры *il* и *im*, коими хорды *cf* и *kn*, также линѣи *de* и *eg*, раздѣлятся на двѣ равныя части въ точкахъ *l* и *m* (§ 59. *Слѣд.* 2); по сему *dc*=*ef* и *en*=*gk*. Для подобныхъ треугольниковъ *cdh* и *efn* будетъ *dh* : *ef* или *cd*=*cd* : *en* или *gk*; также для подобія треугольниковъ *efn* и *gkh* будетъ *ef* или *cd* : *gk*=*en* или *gk* : *gh*; по сей причинѣ *dh* : *dc*=*dc* : *kg*=*kg* : *gh*, то есть ÷ *dh* : *dc* : *kg* : *gh*; но *dh*=*a*, *gh*=*b*; слѣдовательно *cd* и *gk* суть среднія пропорціональныя линѣи между *a* и *b*.

Другое рѣшен. Посредствомъ мѣдныхъ прямоугольниковъ (фиг. 361). На концѣ проведенной линѣи *de*=*b*, поставь перпендикуляръ *dh* =*a*, продолжи *ed* и *hd* неопредѣленно; потомъ взявъ два мѣдные прямоугольника *hcr* и *pfe* и положа ихъ на бумагу, соедини оные вмѣстѣ такъ, чтобы внутренній бокъ *ch* одного находился у точки *h*, а другаго наружной бокъ *ef* у точки *e*; потомъ передвигай оные до тѣхъ поръ, пока верхи прямыхъ угловъ прямоугольниковъ будутъ находиться на продолженныхъ линѣяхъ *hf* и *ec* въ точкахъ *c* и *f*; что учиня опредѣлятся желаемыя среднія пропорціональныя линѣи, первая *dc* и вторая *df* между *dh* и *dc*, или между *a* и *b*.

Доказ. Ибо треугольники *hcf* и *cfe* по рѣшенію суть прямоугольные, и по свойству ихъ будетъ *hd* : *cd*=*cd* : *df*, также *cd* : *df*=*df* : *de* (§ 121); слѣдовательно для равенства содержаній *hd* : *cd* =*cd* : *df*=*df* : *de*, то есть ÷ *kd* : *cd* : *df* : *de*.

§ 473. ТЕОРЕМА. *Ежели четыре линѣи a, b, c и d въ непрерывной Геометрической пропорціи,*

то будетъ квадратъ первой линѣи a, умноженной на послѣднюю d, равенъ кубу изъ первой средней b, то есть $a^2 \times d = b^3$. Фиг. 362.

Доказ. Поелику $a:b = c:d$, также $a:b = b:c$ по положенію; при чемъ въ первой пропорціи $a \times d = b \times c$, а во второй $a \times c = \overline{b}^2$ (*Ариѳм.* § 115), изъ коихъ первыя и вторыя части умножа между собою, будетъ $a^2 \times d \times c = b^3 \times c$ (*Ариѳм.* § 36); а раздѣля оба количества чрезъ c, частное $a^2 \times d = b^3$; то есть квадратъ первой линѣи a, умноженный чрезъ послѣднюю d, равенъ кубу изъ первой средней b.

§ 474. ТЕОРЕМА. *Ежели четыре линѣи a, b, c и d въ непрерывной Геометрической пропорціи, то будетъ кубъ первой линѣи a, содержаться къ кубу второй b, какъ первая линѣя a, къ послѣдней d.* Фиг. 362.

Доказ. Дабы доказать, что $a^3:b^3 = a:d$, то должно быть въ сей пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ $a^3 \times d$, равно произведенію среднихъ $b^3 \times a$; но какъ въ предыдущей теоремѣ доказано, что $a^2 \times d = b^3$, то умножа сіи равныя количества чрезъ a, будетъ $a^3 \times d = b^3 \times a$, то есть произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ. Слѣдовательно показанная пропорція справедлива (*Ариѳм.* § 116).

§ 475. ЗАДАЧА. *Между двухъ данныхъ чиселъ 4 и $13\frac{1}{2}$, найти два среднія пропорціональныя числа непрерывной Геометрич. пропорціи.*

Рѣшен. Поелику въ § 473мъ доказано, что квадратъ первой линѣи, умноженной чрезъ послѣднюю, равенъ кубу изъ первой средней; по сей причинѣ, когда первое число 4 умножится квадратно, а потомъ чрезъ послѣдн. число $13\frac{1}{2}$, то кубич. корень изъ сего произведенія будетъ

первое среднее число, т. е. $\sqrt[3]{16 \times 13\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{216} = 6$, равно первому среднему; но какъ первое среднее со вторымъ и послѣднимъ составляютъ непрерывную Геометрическую пропорцію, то умноживъ первое среднее чрезъ послѣднее $13\frac{1}{2}$, произведеніе $13\frac{1}{2} \times 6 = 81$, будетъ равно квадрату втораго средняго (*Ариѳм.* § 115. *Приб.*), котораго квадратной корень будетъ второе среднее, то есть $\sqrt{81} = 9$; и для того будетъ $\div 4 : 6 : 9 : 13\frac{1}{2}$.

§ 476. ТЕОРЕМА. *Всякое тѣло содержится въ другомъ подобномъ ему тѣлѣ столько разъ, сколько разъ бокъ перваго содержится въ четвертой пропорціональной линѣи, сысканной къ боку перваго и сходственному боку втораго тѣла.*

Доказ. Представимъ себѣ, что требуется познать, сколько разъ шаръ y содержится въ шарѣ x (*фиг.* 393), то для сего къ діаметру cd и къ діаметру cb, сыскавъ четвертую пропорціональную линѣю fh непрерывной Геометрической пропорціи, будетъ $\div cd : cb : eg : fh$ (§ 124); а изъ сего произойдетъ слѣдующая пропорція: $\overline{cd}^3 : \overline{cb}^3 = cd : fh$ (§ 474); но поелику толстоты шаровъ содержатся какъ кубы діаметровъ (§ 469), то будетъ толстота шара $y : x = \overline{cd}^3 : \overline{cb}^3$, и для равенства содержаній будетъ $y : x = cd : fh$, то есть толстота шара y содержится къ толстотѣ шара x столько разъ, сколько разъ діаметръ cd содержится въ четвертой пропорціональной линѣи fh, сысканной къ діам. перваго и къ діаметру втораго шара.

Такимъ же образомъ познается содерж. куб. и всякихъ тѣлъ въ другихъ подобныхъ тѣлахъ.

§ 477. ЗАДАЧА. *Трехсторонную пирамиду*

abcd превратить въ призму fghk, по основанію abc. Фиг. 363.

Рѣшен. Сдѣлай основаніе fgh=основанію abc пирамиды, и раздѣли высоту ed на три равныя части, сдѣлай высоту mn равную третіей части высоты ed пирамиды $abcd$, то произойдетъ призма $fghk$ желаемая.

Доказ. Поелику толстота пирамиды $abcd$ равна произведенію изъ основанія acb и одной трети высоты ed; но основаніе призмы равно основанію пирамиды, и высота mn равна $\frac{1}{3}ed$ пирамиды; слѣдственно и толстота призмы $fghk$ равна толстотѣ пирамиды $abcd$ (*Ариѳм.* § 30).

§ 478 ЗАДАЧА. *Сдѣлать пятистороннюю призму fklm равную данной четверосторонной пирамидѣ abcd, которой бы высота on была равна высотѣ ed данной пирамиды.* Фиг. 364.

Рѣшен. Основаніе ab пирамиды $abcd$ раздѣли на три равныя части (§ 329); третью часть преврати въ правильной пятиугольникъ fk (§ 294); сдѣлай on=высотѣ de, будетъ призма $fklm$ желаемая.

Доказ. Положимъ основаніе ab пирамиды $=x$, высота $de=y=on$, то основаніе fk призмы будетъ$=\frac{1}{3}x$; по сему толстота пирамиды $acbd$ будетъ$=\frac{1}{3}xxy$ (§ 438), а толстота призмы$=\frac{1}{3}xxy$ (§ 431); но $\frac{1}{3}xxy=\frac{1}{3}xxy$; слѣдовательно оныя тѣла толстотою равны.

§ 479. ЗАДАЧА. *Превратить цилиндръ ab въ конусъ по одной высотѣ.* Фиг. 365.

Рѣшен. Сдѣлавъ кругъ cd втрое больше круга ag (§ 309), изъ центра f поставь перпендикуляръ $ef=bg$, будетъ конусъ ced=цилиндру ab.

Доказ. Положимъ площадь круга $ag=x$, высота $bg=ef=y$, будетъ основаніе $cd=3x$.

Толстота цилиндра $ab = xxy$ (§ 431), толстота конуса $= 3xx \frac{1}{3}y = xxy$; слѣдовательно оныя тѣла толстотою равны.

§ 480. ЗАДАЧА. *Сдѣлать трехстороннюю пирамиду fgkl, равную четвеpосторонной призмѣ acde, которой бы основаніе равно было основанію призмы.* Фиг. 366.

Рѣшен. Основаніе *acb* призмы *acd*, преврати въ равносторонной треугольникъ *fgl*; сдѣлай высоту *kh* втрое больше высоты *bd*, то будетъ пирамида *fgkl* равна призмѣ *acae*.

Доказ. Ежели положимъ основаніе призмы $ae = x$, высота $bd = y$, то будетъ основаніе *fgl* пирамиды равно x, а высота $kh = 3y$, толстота же призмы $= xxy$, а толстота пирамиды $= \frac{xx3y}{3} = xxy$; слѣдоват. оныя тѣла толстотою равны.

§ 481. ЗАДАЧА. *Сдѣлать четверосторонную призму eg равную данному цилиндру ac.* Ф: 367.

Рѣшен. Основаніе цилиндра *ab* преврати въ квадратъ *ef* (§ 297); сдѣлай высоту $fg =$ высотѣ *bc* цилиндра *ac*, то будетъ призма *eg* желаемая.

Доказ. Поелику основаніе *ab* цилиндра *ac*, равно основанію *ef* призмы *eg*, а высота $bc =$ высотѣ *fg* по рѣшенію; слѣдовательно оныя тѣла равны между собою (§ 428).

Примѣч. Такимъ же образомъ превращается цилиндръ въ призму трехсторонную, пятисторонную и проч.

§ 482. ЗАДАЧА. *Сдѣлать кубъ hkm равный четверосторонной призмѣ efg.* Фиг. 368.

Рѣшен. Между бокомъ *ef* основанія *ef*, и высотою *fg* призмы *efg*, сыщи двѣ среднія пропорціональныя линѣи (§ 479); изъ первой

средней, то есть изъ меньшей, которая$=hk$, сдѣлай кубъ $hkmn$, получишь желаемое.

Доказ. Пусть вторая средняя$=x$, то будетъ $\div of : hk : x : fg$ по рѣшенію; и $\overline{of}^2 \times fg$ будетъ $= \overline{hk}^3$ (§ 473); но $\overline{of}^2 \times fg$ есть толстота призмы efg § 431), а $\overline{hk}^3$=толстотѣ куба $hkmn$; слѣдовательно оныя тѣла толстотою равны.

§ 483. ЗАДАЧА. *Цилиндръ bg, котораго діаметръ основанія bf меньше высоты fg, превратить въ другой, котораго бы діаметръ основанія равенъ былъ высотѣ.* Фиг. 369.

Рѣшен. Между діаметромъ bf и высотою fg, сыщи двѣ среднія пропорціональныя линѣи; изъ первой средней, то есть изъ меньшой, которая$=ef$, сдѣлай цилиндръ ed, получишь требуемое.

Доказ. Естьли положимъ, что вторая средняя$=x$, то будетъ $\div bf : ef : x : fg$, при чемъ $\overline{bf}^2 \times fg = \overline{ef}^3$ (§ 473); а когда каждое изъ сихъ количествъ умножится чрезъ $\frac{11}{14}$, то произведеніе $\frac{11}{14}\overline{bf}^2 \times fg$ будетъ$=\frac{11}{14}\overline{fe}^2 \times fe$; но $\frac{11}{14}\overline{bf}^2$ есть площадь круга діаметра bf, и $\frac{11}{14}\overline{ef}^2$ есть площадь круга діаметра ef (§ 238. *Приб.* 2); по сему $\frac{11}{14}\overline{bf}^2 \times fg$=толстотѣ цилиндра bg, также $\frac{11}{14}\overline{fe}^2 \times fe = \frac{11}{14}\overline{fe}^2 \times fd$=толстотѣ цилиндра ed (§ 434); слѣдовательно оныя тѣла толстотою равны.

§ 484. ЗАДАЧА. *Четвеpостороннюю призму efd или кубъ, превратить въ другую gik, чтобы оной высота была равна данной высотѣ ef.* Фиг. 370.

Рѣшен. Къ данной высотѣ ef, къ высотѣ призмы fd и къ боку ae основанія ef, сыщи четвертую пропорціональную ab (§ 122); по-

томъ между бокомъ ae и четвертою пропорціональною ab, сыщи среднюю пропорціональную an (§ 125); наконецъ проведя $gh=an$, начерти квадратъ gi; взявъ оной за основаніе, сдѣлай призму gik, которой бы высота ik была равна данной высотѣ ef, получишь требуемое.

Доказ. Поелику $ef:fd=ae:ab$ (§ 122), также $ae:an=an:ab$ (§ 125); и $\overline{ae}^2:\overline{an}^2=ae:ab$ (245); по сему для равенства содержаній и что $an=gh$ и $ef=ik$, будетъ $\overline{ae}^2:\overline{an}^2=ef:fd$, то есть $\overline{ae}^2:\overline{gh}^2=ik:fd$; при чемъ произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ, то есть $\overline{ae}^2\times fd=\overline{gh}^2\times ik$; но $\overline{ae}^2\times fd=$ толстотѣ призмы efd также $\overline{gh}^2\times ik=$ толстотѣ призмы gik; слѣдовательно оныя тѣла толстотою равны.

Слѣдств. I. Такимъ образомъ всякая призма, *на прим.* трехсторонная ead, по данной высотѣ ef превращается въ другую $ghik$ (*фиг.* 371). Ибо сдѣлавъ рѣшеніе какъ и прежде, докажется, что $\overline{ae}^2:\overline{gh}^2=ik:df$; но для подобныхъ треугольниковъ (положа площадь $\Delta aef=x$, а площадь $\Delta ghi=y$) будетъ $x:y=\overline{ae}^2:\overline{gh}^2$ (§ 173), и для равенства содержаній $x:y=ik:df$; при чемъ $x\times df=y\times ik$ (*Ариѳм.* § 115), то есть толстота призмы $eafd=$ толстотѣ призмы $ghik$.

Слѣдств. II. Также превращается всякой конусъ или пирамида въ другую по какой бы то ни было высотѣ; ибо сыскавъ къ данной высотѣ ef, къ высотѣ rm и къ боку ae основанія (*фиг.* 370), четвертую пропорціональную линѣю fd, докажется, что $\overline{ea}^2\times rm=\overline{gh}^2\times pq$, изъ коихъ каждое раздѣля на 3, будетъ $\frac{\overline{ea}^2\times rm}{3}=\frac{\overline{gh}^2\times pq}{3}$,

то есть толстота четверосторонной пирамиды $eafm$ равна толстотѣ пирамиды $ghip$; также изъ перваго слѣдствія видно, что $xxrm = yxik = yxpq$ (фиг. 371), изъ коихъ раздѣливъ каждое на 3, выдетъ $\frac{xxrm}{3} = \frac{yxpq}{3}$, то есть толстота трехсторонной пирамиды $eafm$ равна толстотѣ пирамиды $ghip$.

§ 485. ЗАДАЧА. *Четверосторонную призму $abcd$ или кубъ; превратить въ другую $ghik$ по основанію gi.* (Фиг. 372.

Рѣшен. Къ боку gh даннаго основанія gi и къ боку ab данной призмы, сыщи третью пропорціональную линѣю np (*); потомъ къ боку gh, которой равенъ sn, къ третьей пропорціональной np и къ высотѣ призмы $cd = sq$, сыщи четвертую пропорціональную qr (§ 122); напослѣдокъ на данномъ основаніи gi, сдѣлай призму $ghik$, которой бы высота ik была равна qr, получишь желаемое.

Доказ. Поелику $sn : no = no : np$ по рѣшенію; но какъ $sn = gh$ и $no = ab$, то будетъ $gh : ab = ab : np$ и $\overline{gh}^2 : \overline{ab}^2 = gh : np$ (§ 245); но sn или $gh : np = sq : qr$, или $cd : qr$ или ik по рѣшенію; по сему для равенства содержаній будетъ $\overline{gh}^2 : \overline{ab}^2 = cd : ik$, при чемъ $\overline{gh}^2 \times ik = \overline{ab}^2 \times cd$ (*Ариѳм.* § 115), то есть толстота призмы $ghik$ равна толстотѣ призмы $abcd$.

(*) Слѣдующимъ образомъ: на произвольно проведенной линѣи sp положи $sn = gh$; изъ точки n поставь перпендикуляръ $no = ab$, и проведя os, на концѣ линѣи os поставь перпендикуляръ op, будетъ np третья пропорціональная; ибо по свойству прямоугольника sop будетъ $\div sn : on : np$ (§ 123).

Прибавл. I. Такимъ образомъ всякая призма, какъ *на прим.* пятисторонная $abcde$, по данному основанію mhi превращается въ другую $ghikl$ (*фиг.* 373). Ибо сдѣлавъ рѣшеніе какъ и прежде, докажется, что $\overline{gh}^2 : \overline{ab}^2 = cd : ik$; но положивъ площадь пяти-угольника $gi = z$, площадь пяти-угольника $ac = y$, будетъ $z : y = \overline{gh}^2 : \overline{ab}^2$ (§ 243); а для равенства содержаній будетъ $z : y = dc : ik$, при чемъ $y \times cd = z \times ik$, т. е. толстота призмы $abcde$ = толст. призмы $ghikl$.

Прибавл. II. Тѣмъ же самымъ образомъ всякая пирамида или конусъ abc, по данному основанію ef, превращается въ другой efh (*фиг.* 374). Ибо по предыдущей задачѣ сыскавъ къ діаметру основанія ef и къ діаметру основанія ab, третью пропорціональную np; потомъ къ діаметру ef, къ третьей пропорціональной np и къ высотѣ cd четвертую пропорціональную $qr = gh$ (*фиг.* 372), докажется, что $\overline{ef}^2 : \overline{ab}^2 = cd$ gh; но положивъ площадь круга діаметра $ef = y$, площадь круга діаметра $ab = x$, будетъ $y : x = \overline{ef}^2 : \overline{ab}^2$; а въ разсужденіи равенства содержаній $y : x = cd : gh$, при чемъ $y \times gh = x \times cd$; изъ коихъ раздѣля каждое количество на 3, будетъ $\frac{y \times gh}{3} = \frac{x \times cd}{3}$, то есть толстота конуса efh, равна толстотѣ конуса abc.

§ 486. ЗАДАЧА. *Отрѣзной конусъ $abcd$ превратить въ пятистороннюю пирамиду, по данному основанію qrs.* Фиг. 375.

Рѣшен. Сдѣлай прямоугольникъ gk, котораго бы основаніе gh было равно окружности круга діаметра cd, а высота hk равна $\frac{1}{2}$ радіуса af; потомъ прямоугольникъ gk, кругъ cd,

также и круга *ab*, превратя каждой въ квадратъ, сложи оныя вмѣстѣ (§ 303); квадратъ равной суммѣ всѣхъ оныхъ плоскостей преврати въ правильной пяти-угольникъ *lmn* (§ 294); потомъ взявъ оной за основаніе, сдѣлай пирамиду *lmne*, которой бы высота *ef* была равна высотѣ *ef* конуса *abcd*; наконецъ по предыдущей задачѣ преврати оную по данному основанію *qrs* въ другую *qsrv*, получишь желаемое.

Доказ. Прямоугольникъ *gk* по § 441 есть средняя Геометрическая площадь между двухъ основаній *cd* и *ab* конуса *abcd*, и сумма сихъ плоскостей равна пяти-угольнику *lmn* по рѣшенію; толстотажъ конуса *abdc* равна произведенію изъ суммы показанныхъ плоскостей, то есть изъ плоскости пяти-угольника *lmn* чрезъ $\frac{1}{3}ef$ высоты конуса (§ 443); также и толстота пятисторонной пирамиды *lmen*, равна произведенію изъ плоскости тогожъ пятиугольника *lmn* и одной трети высоты *ef*; по сему оныя произведенія въ обоихъ случаяхъ равны; слѣдовательно толстота конуса *abcd* = толстотѣ пирамиды *lmne*, а по рѣшенію (§ 485) равна толстотѣ пирамиды *qrsv*.

Примѣч. Такимъ же образомъ и всякая отрѣзная пирамида превращается въ призму, конусъ или какую пожелаешь пирамиду по данному основанію или высотѣ.

§ 487. ЗАДАЧА. *Шаръ x превратить въ кубъ* Фиг. 376.

Рѣшен. Діаметръ *mn* раздѣли на 21 часть, сдѣлай *ns* = 11 тѣмъ же частямъ; сыщи между діаметромъ *mn* и частію *ns* двѣ среднія пропорціональныя линѣи, изъ первой сред-

ней, которая равна gh, сдѣлай кубъ $ghikl$, получишь желаемое.

Доказ. Положимъ, что вторая средняя $= y$, то будетъ $\div mn : gh : y : ns$ (§ 472); чего ради $\overline{mn}^3$ или $\overline{ab}^3 : \overline{gh}^3 = mn : ns$ или $21 : 11$ (§ 474); но толстота куба діаметра $mn = abcd$ содержится къ толстотѣ шара x, какъ $21 : 11$ (§ 460), то есть $\overline{ab}^3 : x = 21 : 11$; по сему для равенства содержаній $\overline{ab}^3 : \overline{gh}^3 = \overline{ab}^3 : x$; но $\overline{ab}^3 = \overline{ab}^3$, слѣдовательно $\overline{gh}^3 = x = ghikl$.

Другимъ образомъ. Около шара x, описавъ цилиндръ ac, раздѣли высоту цилиндра ad на три равныя части въ f и r; то будетъ цилиндръ $abef = \frac{2}{3}$ цилиндра ac = толстотѣ шара x (§ 446. *Приб.* 2). Преврати цилиндръ ae въ четвероэсторонную призму (§ 481), а оную въ кубъ $ghikl$ (§ 482), получишь желаемое.

§ 488. ЗАДАЧА. *Кубъ ad превратить въ шаръ.* Фиг. 377.

Рѣшен. Бокъ куба ab раздѣли на 11 равныхъ частей, положи $ak = 21$ тѣмъ же частямъ; между ab и ak сыщи двѣ средніа пропорціональныя линѣи; потомъ изъ первой средней gh сдѣлай шаръ z, получишь желаемое.

Доказ. Естьли положимъ, что вторая средняя $= y$: то по рѣшенію будетъ $\div ab : gh : y : ak$; $\overline{ab}^3 : \overline{gh}^3 = ab : ak$ (§ 474) $11 : 21$; но толстота шара $z : \overline{gh}^3 = 11 : 21$ (§ 460), по сему $\overline{ab}^3 : \overline{gh}^3 = z : \overline{gh}^3$; но $\overline{gh}^3 = \overline{gh}^3$; слѣдовательно $\overline{ab}^3 = z =$ кубу ad.

Другимъ образомъ. Сторону куба, то есть квадратъ ae. (*фиг.* 377), преврати въ кругъ lm (§ 298), сдѣлай кругъ $nops$ (*фиг.* 378) втрое

больше круга *lm* (§ 309); потомъ между радіусомъ *qn* утроеннаго круга *nops*, и удвоеннымъ бокомъ *ab* куба *ad*, то есть между $2ab=af$, сыщи двѣ среднія пропорціональныя линѣи; изъ первой средней *gh*, сдѣлай шаръ *z*, получишь желаемое.

Доказ. Поелику площадь круга діаметра *np* $=\overline{3ab}^2$ по рѣшенію; но какъ плоскость круга *nops* или $\overline{3ab}^2:\overline{nq}^2=22:7$ (§ 238 *Приб.* 1), откуда найдется $\overline{nq}^2=\frac{21}{22}\overline{ab}^2$. И такъ (положивъ вторую среднюю $=y$, будетъ $\div nq:gh:y:2ab$ по рѣшенію, и $\overline{nq}^2\times 2ab=\overline{gh}^3$ (§ 473); а когда на мѣсто $\overline{nq}^2$ поставится $\frac{21}{22}\overline{ab}^2$, то будетъ $\frac{21}{22}\overline{ab}^2\times 2ab=\frac{11}{21}\overline{ab}^3=\overline{gh}^3$, изъ коихъ каждое количество умножа чрезъ $\frac{21}{11}$, будетъ $\overline{ab}^3=\frac{11}{21}\overline{gh}^3$; $\frac{11}{22}\overline{gh}^3=$толстотѣ шара *z* (§ 460. *Приб.*), слѣдовательно толстота шара $z=\overline{ab}^3$.

Примѣч. Такимъ образомъ всякія призмы, цилиндры, пирамиды, конусы и проч., превращая каждую посредствомъ предыдущихъ задачь въ четверостороннюю призму, потомъ въ кубъ и напослѣдокъ въ шаръ превратиться могутъ.

§ 489. ЗАДАЧА. *Вырѣзокъ шара acbd превратить въ шаръ.* Фиг. 379.

Рѣшен. Кругъ радіуса *ad* преврати въ квадратъ *gi*, взявъ оной за основаніе, сдѣлай призму *gm*, чтобы оной высота *hk* была равна $\frac{1}{3}$ радіуса *ac*, потомъ призму *gm* преврати въ кубъ (§ 482), а по § 488 му преврати сей кубъ въ шаръ *z*, получишь желаемое.

Доказ. Пусть будетъ радіусъ $ac=x$, площадь круга радіуса $ad=y$, по сему площадь квадрата $gi=y$, и $hk=\frac{x}{3}$ по рѣшенію; и такъ

будетъ $yx\frac{x}{3}$ = толстотѣ вырѣзка *acbd* (§ 449), также $gixhk = yx\frac{x}{3}$ = толстотѣ призмы *gm* (§ 431); слѣдовательно толстота вырѣзка шара *acbd* = толстотѣ призмы *gm*, и равна толстотѣ шара *z* по рѣшенію (§ 482 и 488).

О сложеніи тѣлъ.

§ 490. ЗАДАЧА. *Начертить конусъ равный двумъ даннымъ abc и def, имѣющимъ равныя основанія.* Фиг. 380.

Рѣшен. Сдѣлай основаніе *kl* конуса, равное основанію *cb* или *de*, а высоту *mn* = суммѣ высотъ *fh* + *gc* данныхъ конусовъ *abc* и *def*, получишь желаемое.

Доказ. Положимъ площадь основанія каждаго изъ данныхъ конусовъ = x, высота $cg = y$, а высота другаго $hf = z$; то площадь основанія конуса *klm* будетъ равна x, высота $mn = y + z$; того ради будетъ толстота конуса перваго $abc = \frac{x \times y}{3}$, втораго $def = \frac{x \times z}{3}$; толстота жъ конуса $klm = x \times \frac{(y+z)}{3} = \frac{x \times y + x \times z}{3}$ (§ 438), равна суммѣ толстотъ конусовъ *abc* и *def*.

§ 491. ЗАДАЧА. *Начертить призму равную двумъ даннымъ defg и hikl, имѣющимъ одинакую высоту.* Фиг. 381.

Рѣшен. Сдѣлай треугольникъ *mnp* равный *def* + *hik* (§ 309), и высоту *po* = высотѣ одной изъ данныхъ призмъ, то получится требуемая призма *mnpo*.

Доказ. Поелику толстота призмы $defg = A \times c$, и толстота призмы $hikl = B \times c$, также толстота призмы $mnpo = (A + B) \times c = A \times c + B \times c$, т. е. = суммѣ толстотъ двухъ данныхъ призмъ.

Примѣч. Посредствомъ сихъ двухъ задачь складываются конусы, цилиндры, призмы и пирамиды равныхъ основаній и высотъ; когдажъ оныя будутъ неравныхъ высотъ или основаній, то надлежитъ ихъ превращать по основанію или высотѣ, а потомъ поступать какъ показано.

§ 492. ЗАДАЧА. *Сдѣлать кубъ равный двумъ не равнымъ кубамъ mno и gbd.* (Фиг. 382.

Рѣшен. Сыщи къ боку *ab* большаго куба, и къ боку *mn* меньшаго, четвертую пропорціональную линѣю *ah*, которую придай къ боку *ab* большаго куба; потомъ между *bc* и *bh* сыщи двѣ среднія пропорціональныя линѣи; изъ первой средней сдѣлай кубъ *qpr*, которой будетъ равенъ суммѣ кубовъ *mno* и *gbd*.

Доказ. Естьли положимъ, что третья пропорціоналлная линѣя $= t$, то будетъ $\div ab : mn : t : ah$; при чемъ $\overline{ab}^2 \times ah$ или $\overline{al}^2 \times ah = \overline{mn}^3$, то есть толстота призмы *fkhl* = кубу *mno*; по сему призма *dchk* = двумъ кубамъ *bad* + *no*; а по рѣшенію (§ 482) равна кубу *qpr*, слѣдовательно кубъ *qpr* равенъ двумъ кубамъ *bad* + *mno*.

Примѣч. Такимъ же образомъ складываются шары и всѣ подобныя тѣла, только вмѣсто боковъ кубовъ, должно употреблять діаметры шаровъ, или сходственные бока подобныхъ тѣлъ. Ибо толстоты шаровъ, также и другихъ подобныхъ тѣлъ содержатся между собою какъ кубы діаметровъ, или какъ кубы сходственныхъ измѣреній. *На прим.* ежели сложить шаръ *x* и *y* (*фиг.* 382), то къ діаметру *ab* большаго шара *y*, и къ діаметру *nm* меньшаго *x*, сыщи четвертую пропорціональную линѣю *ah*; и придавъ оную къ діаметру *ab* большаго шара *y*, сыщи между діаметромъ *ab* и линѣею *bh* двѣ среднія пропорціональныя линѣи (§ 272); потомъ изъ первой

средней pq сдѣлай шаръ z, который будетъ $=x+y$. Ибо по предыдущей задачѣ докажется, что $qp^3 = ab^3 + mn^3$; а по § 462 $y : ab^3 = x : mn^3 = z : qp^3$; по сему $y+x : ab^3 + mn^3 = z : pq^3$; но $pq^3 = ab^3 + mn^3$; слѣдоват. $z = y+x$. Тожъ должно разумѣть и о прочихъ подобныхъ тѣлахъ.

О вычитаніи тѣлъ.

§ 493. ЗАДАЧА. *Призму dfg вычесть изъ призмы mpo, которыя одной высоты, но неравнаго основанія.* Фиг. 381.

Рѣшен. Вычти основаніе призмы def изъ основанія mnp, оставшую плоскость, которая равна hik, возьми за основаніе, а высоту bl сдѣлай равную высотѣ po, будетъ призма $kihl$ равна разности данныхъ призмъ.

Доказ. Положимъ площадь основанія $def = x$, $mnp = y$; высота призмъ $= c$, то будетъ основаніе $hik = y - x$; по сему толстота призмы $defg = x \times c$, призмы $mpo = y \times c$, а призмы $hikl = (y - x) \times c = y \times c - x \times c =$ разности двухъ данныхъ призмъ $defg$ и mpo.

§ 494. ЗАДАЧА. *Конусъ abc вычесть изъ конуса klm, кои одного основанія, но неравныхъ высотъ.* Фиг. 380.

Рѣшен. Сдѣлай основаніе конуса de равное основанію ab или kl, а высоту онаго hf равную разности высотъ данныхъ конусовъ, то конусъ def будетъ означать разность конусовъ.

Доказ. Положимъ основаніе каждаго конуса $= x$, высота gc конуса $abc = y$, высота mn конуса $klm = z$; по сему высота fh конуса $def = z - y$; слѣдственно толстота конуса $abc = \frac{x \times y}{3}$,

конуса $klm=\frac{xxz}{3}$, конуса $def=(z-y)\times\frac{x}{3}=\frac{xxz+xxy}{3}$ $=$разности конусовъ *abc* и *klm*.

Примѣч. Такимъ образомъ вычитаются пирамиды изъ пирамидъ, цилиндры изъ цилиндровъ и призмы изъ призмъ, когда оныя имѣютъ равныя основанія или высоты; когдажъ онѣ будутъ не равныхъ, то надлежитъ ихъ превращать по одному основанію или высотѣ; а потомъ съ оными поступать какъ въ двухъ предыдущихъ задачахъ показано.

§ 495. ЗАДАЧА. *Кубъ mno вычесть изъ куба abf.* Фиг. 383.

Рѣшен. Сыщи къ боку *ab* большаго куба и къ боку *mn* меньшаго четвертую меньшую пропорціональную линѣю *bg* (§ 124), вычти оную изъ *ab*; потомъ сыщи между бокомъ *ab* или *bc* и остаткомъ *ag* двѣ среднія пропорціональныя линѣи, изъ первой средней *qr* сдѣлай кубъ *qrt*, получишь желаемое.

Доказ. Ежели положимъ, что третья пропорціональная линѣя$=v$; то будетъ $\div bc:mn; v:bg$ (§ 124); при чемъ $\overset{-2}{bc}\times bg=\overset{-3}{mn}$ (§ 473), т. е. толстота призмы $ghdc=$кубу *nm*; по сему призма *afhga* равна разности двухъ кубовъ *bad* и *nmo*; а по рѣшенію (§ 482), равна кубу *qrt*; слѣдовательно кубъ *qrt* равенъ разности кубовъ *bad* и *nmo*.

Примѣч. Такимъ же образомъ вычитаются шары и всѣ подобныя тѣла; при чемъ вмѣсто боковъ кубовъ, надлежитъ брать діаметры шаровъ, или сходственные бока подобныхъ тѣлъ, и поступать далѣе, какъ въ сей задачѣ показано; ибо толстоты шаровъ, также подобныхъ тѣлъ, содержатся между собою какъ кубы діаметровъ или сходственныхъ измѣреній.

О увеличиваніи тѣлъ.

§ 496. ЗАДАЧА. *Сдѣлать четвеpосторонную пирамиду втрое больше данной acd, по одной высотѣ.* (Фиг. 384.

Рѣшен. Начерти квадратъ *gi* втрое больше квадрата *ac* (§ 309); сдѣлай высоту *kl* пирамиды *ghik*, равную высотѣ *ed* пирамиды *abcd*, получишь требуемое.

Доказ. Поелику толстоты пирамидъ одной высоты содержатся какъ ихъ основанія (§ 437); но основаніе *gi* втрое больше основанія *ac*; слѣдовательно и толстота пирамиды *ghik* втрое больше пирамиды *abcd*.

§ 497. ЗАДАЧА. *Сдѣлать конусъ въ два съ четвертью раза больше даннаго abc, чтобы былъ одного основанія съ даннымъ.* (Фиг. 385.

Рѣшен. Продолжа высоту *cd*, сдѣлай $de = 2\frac{1}{4}cd$, то начерченной на основаніи *ab*, конусъ *abe* будетъ требуемой.

Доказ. Положимъ основаніе $ab = x$, будетъ толстота конуса $abc = \frac{xxcd}{3}$, а толстота конуса $abe = \frac{xxed}{3}$; по сему $\frac{xxcd}{3} : \frac{xxed}{3} = cd : ed$ (по раздѣленіи на $\frac{x}{3}$); но *ed* въ $2\frac{1}{4}$ больше *cd*; слѣдовательно и толстота конуса *abe* въ $2\frac{1}{4}$ раза больше конуса *abc*.

Примѣч. Такимъ же образомъ призмы, цилиндры всѣ пирамиды увеличиваются.

§ 498. ЗАДАЧА. *Данную пирамиду q увеличить въ два съ половиною раза больше, параллельно основанію de.* (Фиг. 386.

Рѣшен. Сыщи между бокомъ *cd* и $2\frac{1}{2}$ онаго двѣ среднія пропорціональныя линѣи (§ 471); сдѣлай *bc* равную первой средней, проведи *bg*,

bh и *gh* параллельно къ бокамъ основанія *ade*, будетъ пирамида *z* желаемая.

Доказ. Естьли положимъ, что вторая средняя$=y$; то будетъ $\div cd:bc=y:2\frac{1}{2}cd$ по рѣшенію, и притомъ толстота одного тѣла *q*, содержится къ толстотѣ другаго подобнаго тѣла *z*, какъ бокъ *cd* перваго къ четвертой пропорціональной (§ 476), то есть $q:z=cd:2\frac{1}{2}cd$; но $2\frac{1}{2}cd$ въ два съ половиною раза больше *cd*; слѣдовательно *z* въ $2\frac{1}{2}$ раза больше *q*.

Примѣч. Такимъ образомъ всякія пирамиды и конусы во столько разъ увеличиваются, во сколько потребно будетъ.

§ 499. ЗАДАЧА. *Сдѣлать кубъ fek втрое больше даннаго bad.* (Фиг. 387.

Рѣшен. Продолживши *ab*, сдѣлай $ag=3ab$; потомъ между *ab* и утроеннымъ бокомъ *ag*, сыщи двѣ среднія пропорціональныя линѣи, изъ первой средней *ef* сдѣлай кубъ *fek*, которой будетъ втрое больше даннаго *bad*.

Доказ. Положа вторую среднюю$=x$, будетъ $\div ab:ef:x:ag$ по рѣшенію; а по § 474 $\overline{ab}^3:\overline{ef}^3=ab:ag$; но $ag=3ab$, слѣдовательно $\overline{ef}^3=3\overline{ab}^3$.

§ 500. ЗАДАЧА. *Сдѣлать шаръ y, чтобы къ оному данной шаръ x содержался какъ 4:9, то есть чтобы шаръ y, былъ въ $2\frac{1}{4}$ раза болѣе даннаго x.* (Фиг. 388.

Рѣшен. Діаметръ *ab* даннаго шара *x* раздѣли на 4 равныя части, и продолживши *ab*, сдѣлай $ae=9$ тѣмъ же частямъ; потомъ между *ab* и *ae* сыщи двѣ среднія пропорціональныя линѣи; изъ первой средней сдѣлай шаръ *y*, получишь желаемое.

Доказ. Поелику толстота шара $x:y=ab:ae$ (§ 476); но $ab:ae=4:9$; слѣдов. и $x:y=4:9$.

Примѣч. Такимъ образомъ кубы и всѣ подобныя тѣла увеличиваются во столько разъ, во сколько потребно будетъ.

О дѣленiи тѣлъ.

§ 501. ЗАДАЧА. *Сдѣлать пирамиду abcd втрое меньше данной пирамиды ghik, чтобы оныя были одной высоты.* Фиг. 384.

Рѣшен. Раздѣля основанiе gi пирамиды $ghik$ на три равныя части (§ 313), сдѣлай квадратъ $ac=\frac{1}{3}gi$; потомъ взявъ оной за основанiе, положи высоту $ed=kl$, то будетъ пирамида $abcd$ $=\frac{1}{3}$ пирамиды $ghik$.

Доказ. Поелику толстоты пирамидъ одной высоты, содержатся какъ ихъ основанiя; по сему $ghik:abcd=gi:ac$; но $ac=\frac{1}{3}gi$, слѣдовательно и $abcd=\frac{1}{3}$ пирамиды $ghik$.

§ 502. ЗАДАЧА. *Сдѣлать конусъ* $abg=\frac{1}{4}$ *даннаго конуса abc, чтобы оныя были равнаго основанiя.* Фиг. 380.

Рѣшен. Раздѣля высоту cd на четыре равныя части, сдѣлай конусъ abg, чтобы онаго основанiе ab, было равно основанiю ab даннаго конуса abc, а высота $gh=\frac{1}{4}$ высоты cd, получишь желаемое.

Доказ. Естьли положимъ, что основанiе каждаго конуса $=x$, то будетъ толстота конуса $abc=\frac{x\times cd}{3}$, толстота конуса $abg=\frac{x\times gh}{3}$; по сему $\frac{x\times cd}{3}:\frac{x\times gh}{3}=cd:gh$ (по раздѣленiи на $\frac{x}{3}$); но поелику $gh=\frac{1}{4}cd$; слѣдовательно и конусъ abg равенъ одной четверти конуса abc.

Примѣч. Такимъ образомъ призмы и цилиндры въ желаемыя части дѣлятся.

§ 503. ЗАДАЧА. *Пирамиду eabcf раздѣлить на три равныя части плоскостьми параллельными основанію aec.* (Фиг. 390.

Рѣшен. Раздѣля бокъ *ef* на три равныя части въ *m* и *l*, сыщи между *ef* и *mf* двѣ среднія пропорціональныя линѣи; и сдѣлавъ *fi* равную первой средней, разрѣжь пирамиду чрезъ точку *i* плоскостію *ik* параллельною къ основанію *eac*, то будетъ пирамида *ikf* третья часть пирамиды *ecf*. Потомъ сыскавъ между *ef* и *fl* двѣ среднія пропорціональныя линѣи, сдѣлай *fg* равную первой средней, и чрезъ точку *g* разрѣжь пирамиду *cef* плоскостію *gh* параллельно основанію *eac*; то получится пирамида $ghf = \frac{2}{3}$ пирамиды *ecf*; и для того будетъ остатокъ $abhg = \frac{1}{3}$ пирамиды *cef*.

Доказ. Поелику для подобія пирамидъ, будетъ $ecf : ikf = ef : fm$ (§ 476); но $fm = \frac{1}{3} ef$, слѣдовательно пирамида $ikf = \frac{1}{3} ecf$; такимъ же образомъ докажется, что пирамида $ghf = \frac{2}{3}$ пирамиды *ecf*; по сей причинѣ часть $ikhg = \frac{1}{3}$ пирамиды *ecf*, и часть $ghce = \frac{1}{3}$ пирамиды *ecf*.

§ 504. ЗАДАЧА. *Отъ конуса abc отдѣлить $\frac{4}{7}$ плоскостію параллельною основанію ab.* (Ф). 391.

Рѣшен. Раздѣля наклоненной бокъ *ac* на 7 равныхъ частей, сыщи между бокомъ *ac* и четырью седминами онаго *cg* двѣ среднія пропорціональныя линѣи; сдѣлай *ed* равную первой средней; прорѣжь изъ *d* плоскостію *de* параллельно основанію *ab*, то будетъ конусъ $dce = \frac{4}{7}$ конуса *abc*.

Доказ. Поелику для подобія конусовъ будетъ $abc : dce = ac : cg$ (§ 476); но $cg = \frac{4}{7} ac$; слѣдовательно и конусъ $dce = \frac{4}{7}$ конуса abc.

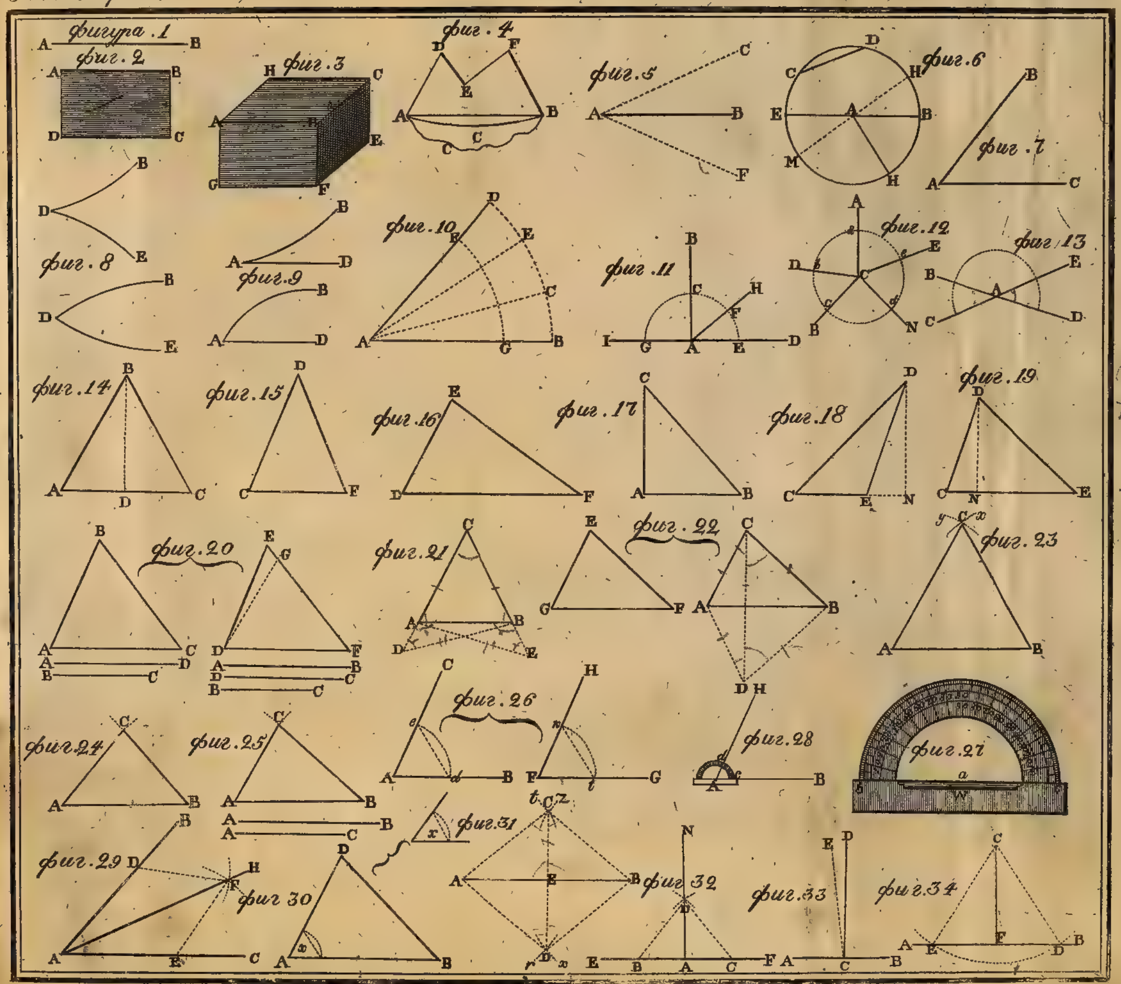
§ 505. ЗАДАЧА. *Сдѣлать кубъ равенъ* $\frac{3}{5}$ *куба* bad. (Фиг. 392.

Рѣшен. Раздѣли бокъ ab куба abd на 5 равныхъ частей; потомъ между бокомъ ab куба bad, и тремя пятинами онаго ah, сыщи двѣ среднія пропорціональныя линѣи; изъ первой средней kl сдѣлай кубъ lkm, получишь желаемое.

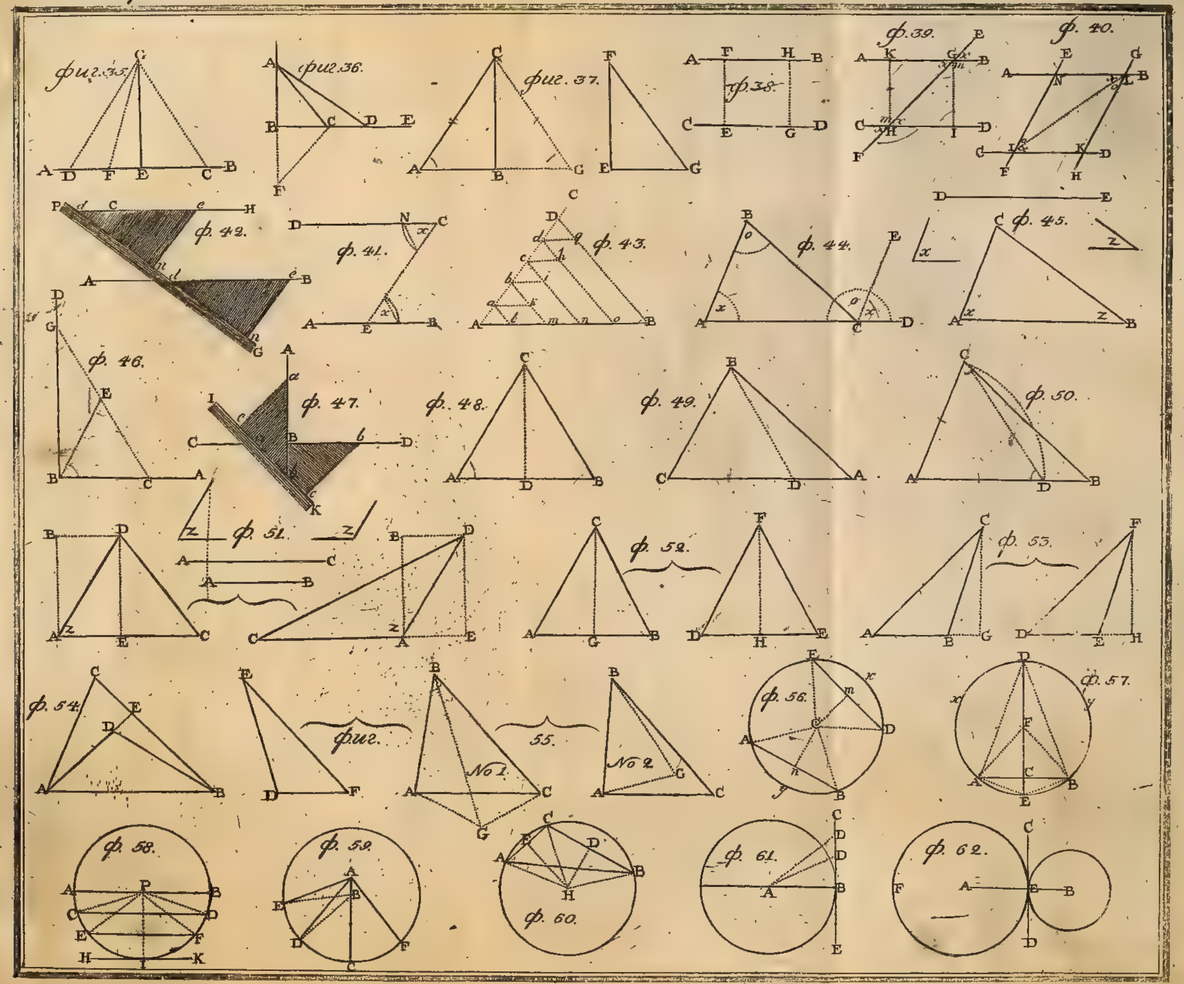
Доказ Пусть вторая средняя $= x$, то будетъ $\div\!\!\div ab : kl : x : ah$, и $\overline{ab}^3 : \overline{kl}^3 = ab : ah$ (§ 474); но $ah = \frac{3}{5} ab$; слѣдовательно $\overline{kl}^3 = \frac{3}{5} \overline{ab}^3$.

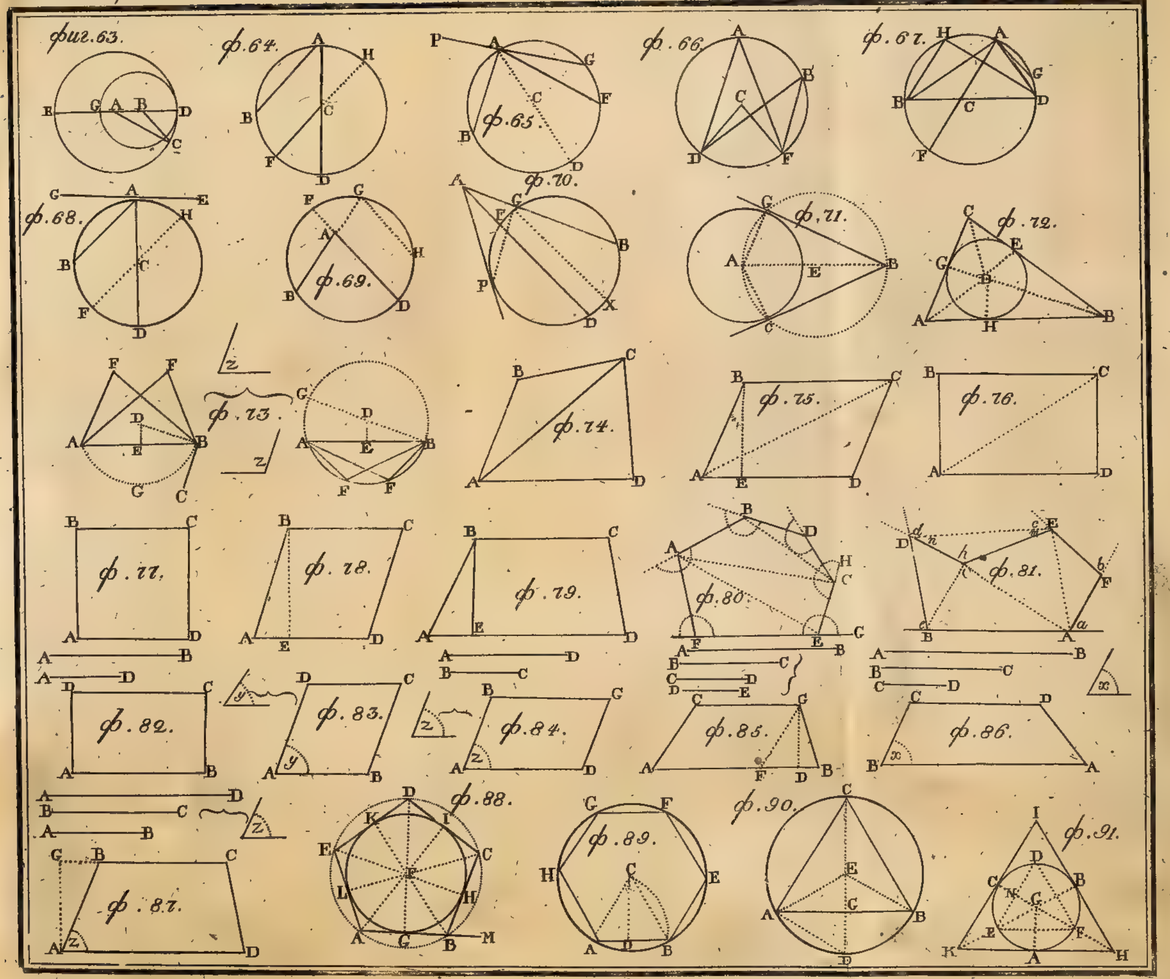
Примѣч. Такимъ же образомъ опредѣляются шары, равныя требуемымъ частямъ данныхъ шаровъ, но только вмѣсто боковъ кубовъ должно употреблять діаметры шаровъ, а впрочемъ поступать по вышеписанному.

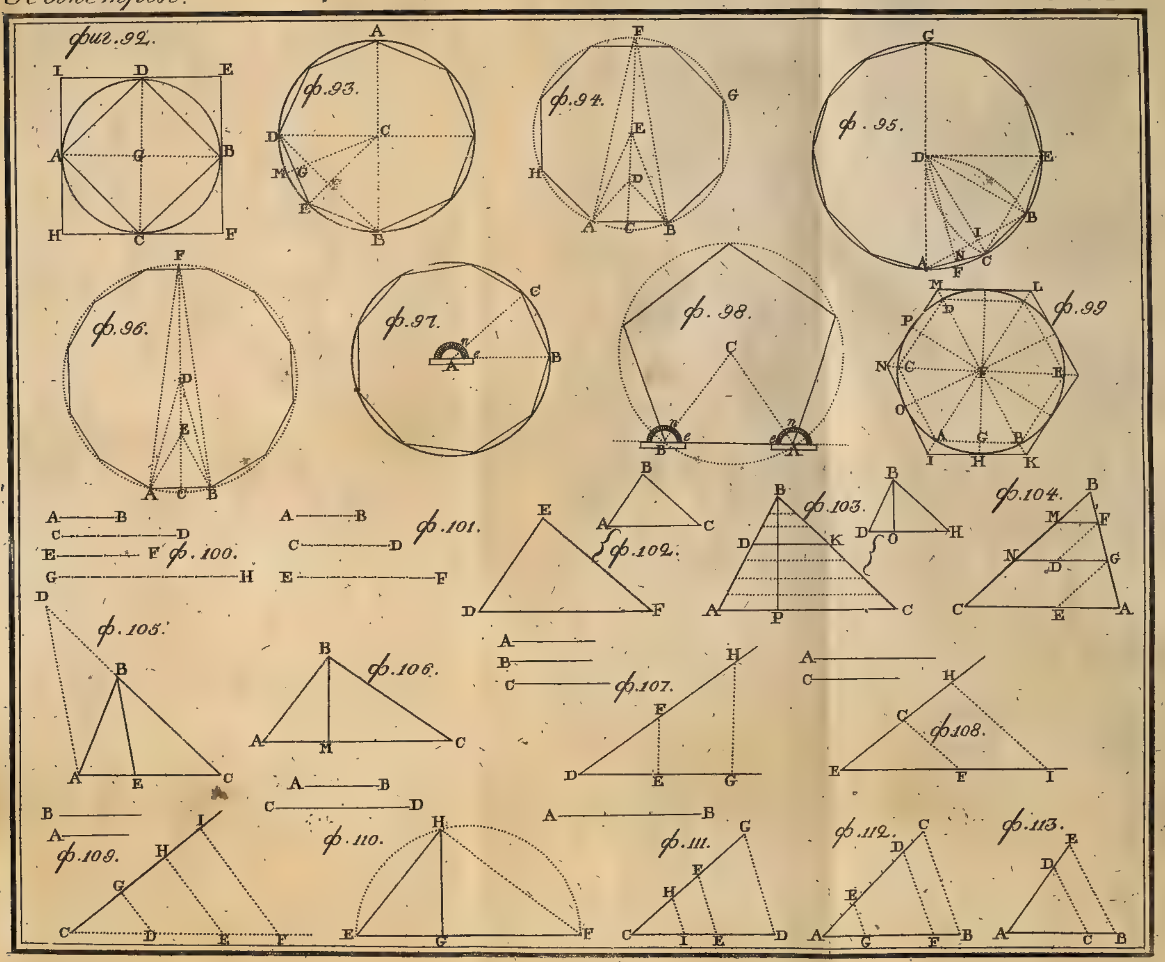
Конецъ втораго Тома.

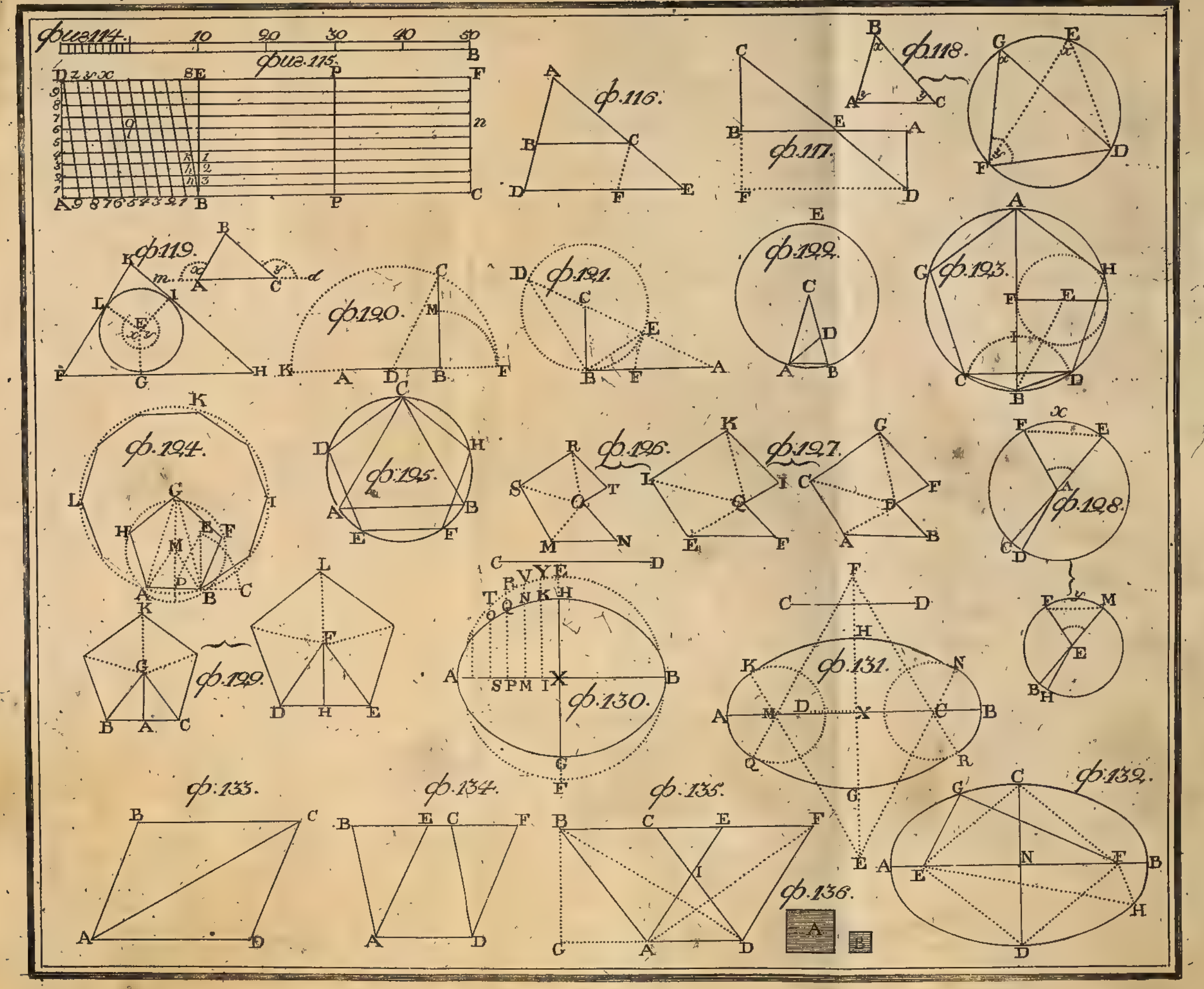

фигура. 1
фиг. 2
фиг. 3
фиг. 4
фиг. 5
фиг. 6
фиг. 7
фиг. 8
фиг. 9
фиг. 10
фиг. 11
фиг. 12
фиг. 13
фиг. 14
фиг. 15
фиг. 16
фиг. 17
фиг. 18
фиг. 19
фиг. 20
фиг. 21
фиг. 22
фиг. 23
фиг. 24
фиг. 25
фиг. 26
фиг. 27
фиг. 28
фиг. 29
фиг 30
фиг. 31
фиг 32
фиг. 33
фиг. 34

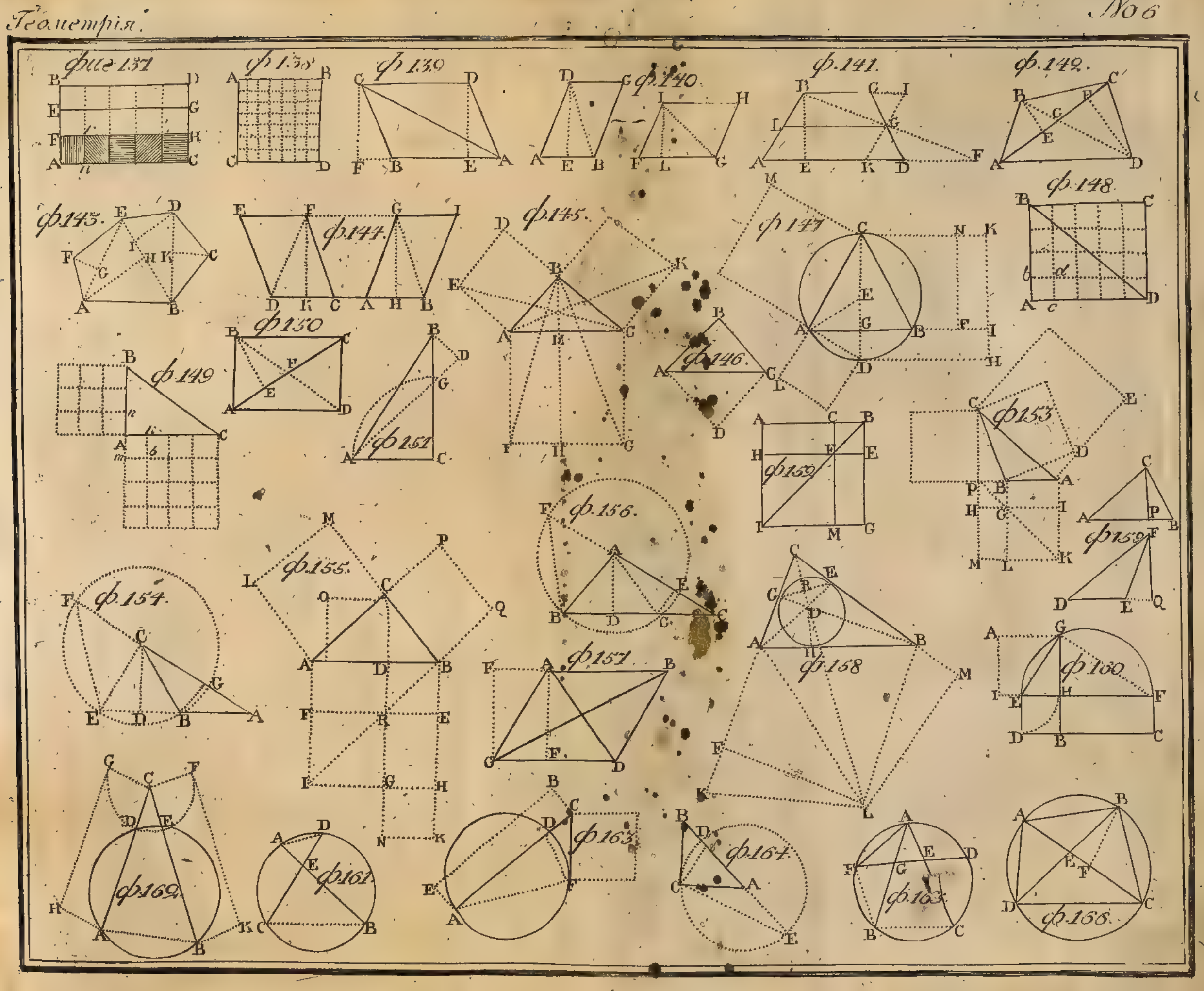


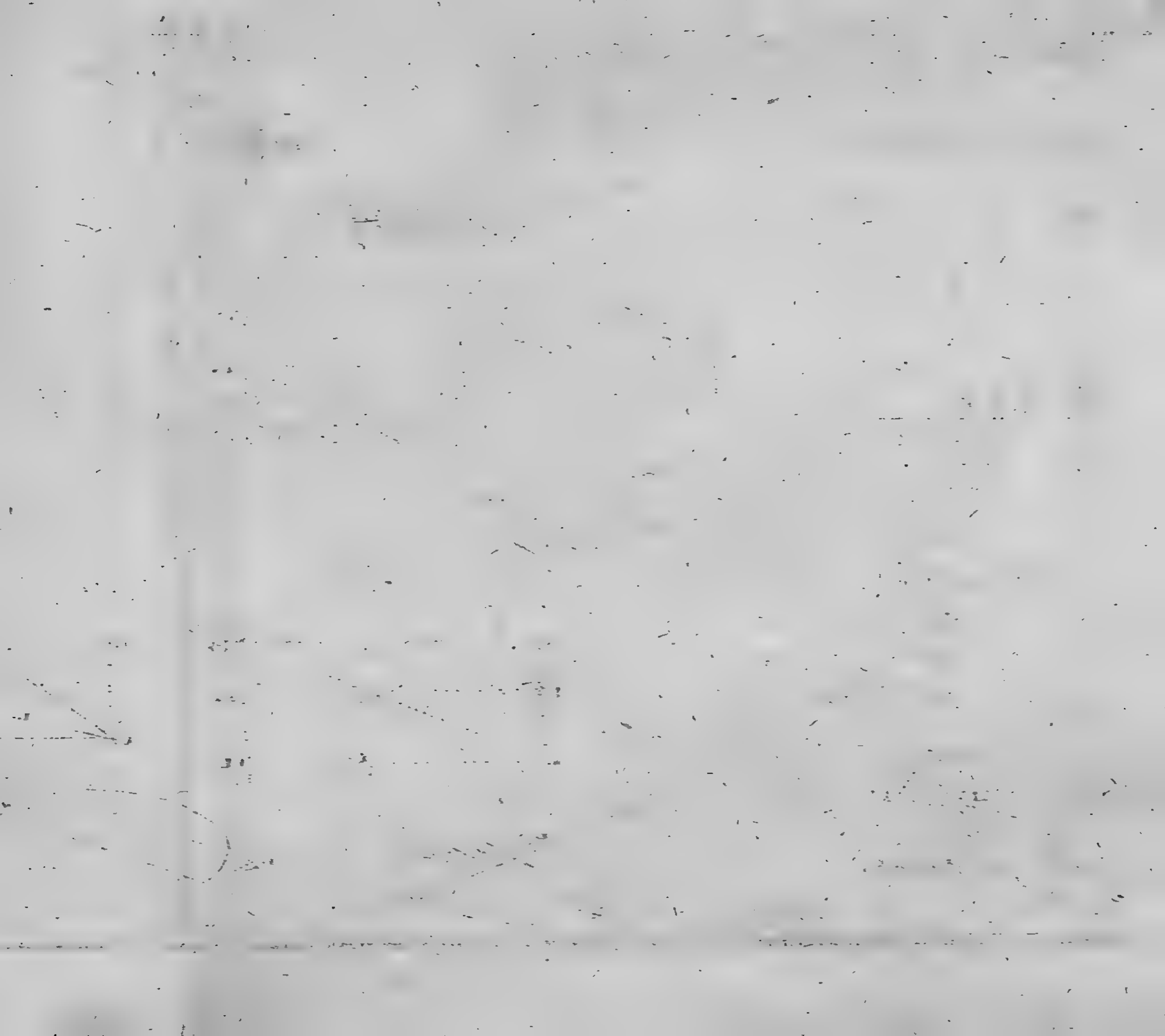

фиг. 35.
фиг. 36.
фиг. 37.
ф. 38.
ф. 39.
ф. 40.
ф. 41.
ф. 42.
ф. 43.
ф. 44.
ф. 45.
ф. 46.
ф. 47.
ф. 48.
ф. 49.
ф. 50.
ф. 51.
ф. 52.
ф. 53.
ф. 54.
фиг. 55.
№ 1
№ 2
ф. 56.
ф. 57.
ф. 58.
ф. 59.
ф. 60.
ф. 61.
ф. 62.

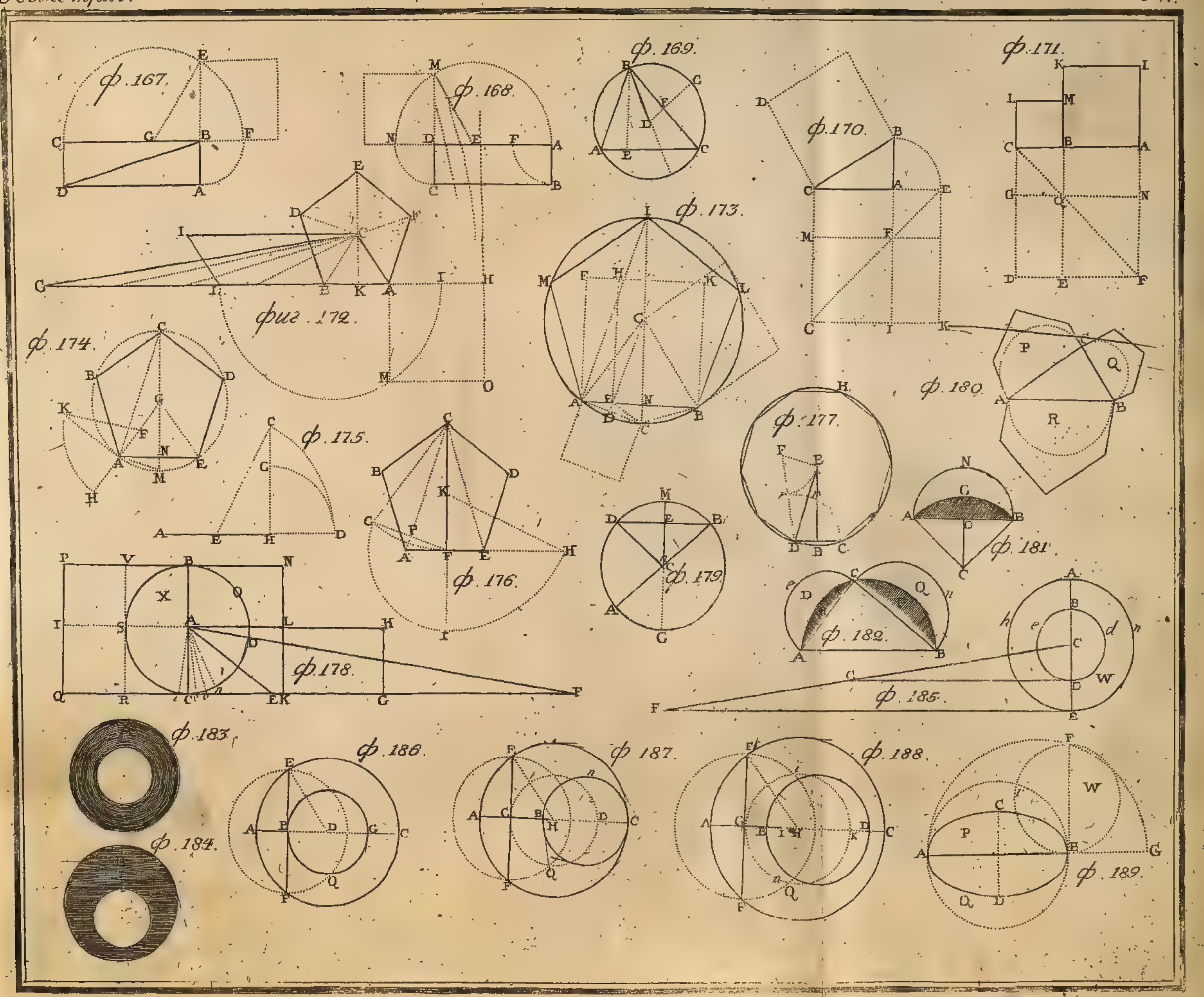

фиг. 63.
ф. 64.
ф. 65.
ф. 66.
ф. 67.
ф. 68.
ф. 69.
ф. 70.
ф. 71.
ф. 72.
ф. 73.
ф. 74.
ф. 75.
ф. 76.
ф. 77.
ф. 78.
ф. 79.
ф. 80.
ф. 81.
ф. 82.
ф. 83.
ф. 84.
ф. 85.
ф. 86.
ф. 87.
ф. 88.
ф. 89.
ф. 90.
ф. 91.


фиг. 92.
ф. 93.
ф. 94.
ф. 95.
ф. 96.
ф. 97.
ф. 98.
ф. 99
ф. 100.
ф. 101.
ф. 102.
ф. 103.
ф. 104.
ф. 105.
ф. 106.
ф. 107.
ф. 108.
ф. 109.
ф. 110.
ф. 111.
ф. 112.
ф. 113.




фиг. 137
ф. 138
ф. 139
ф. 140
ф. 141
ф. 142
ф. 143
ф. 144
ф. 145
ф. 146
ф. 147
ф. 148
ф. 149
ф. 150
ф. 151
ф. 152
ф. 153
ф. 154
ф. 155
ф. 156
ф. 157
ф. 158
ф. 159
ф. 160
ф. 161
ф. 163
ф. 164
ф. 169




ф. 167.
ф. 168.
ф. 169.
ф. 170.
ф. 171.
фиг. 172.
ф. 173.
ф. 174.
ф. 175.
ф. 176.
ф. 177.
ф. 178.
ф. 179.
ф. 180.
ф. 181.
ф. 182.
ф. 183.
ф. 184.
ф. 185.
ф. 186.
ф. 187.
ф. 188.
ф. 189.

ф. 194. ф. 195. ф. 196. ф. 197. ф. 198. ф. 199.

ф. 200. ф. 201. ф. 202. ф. 203. ф. 204.

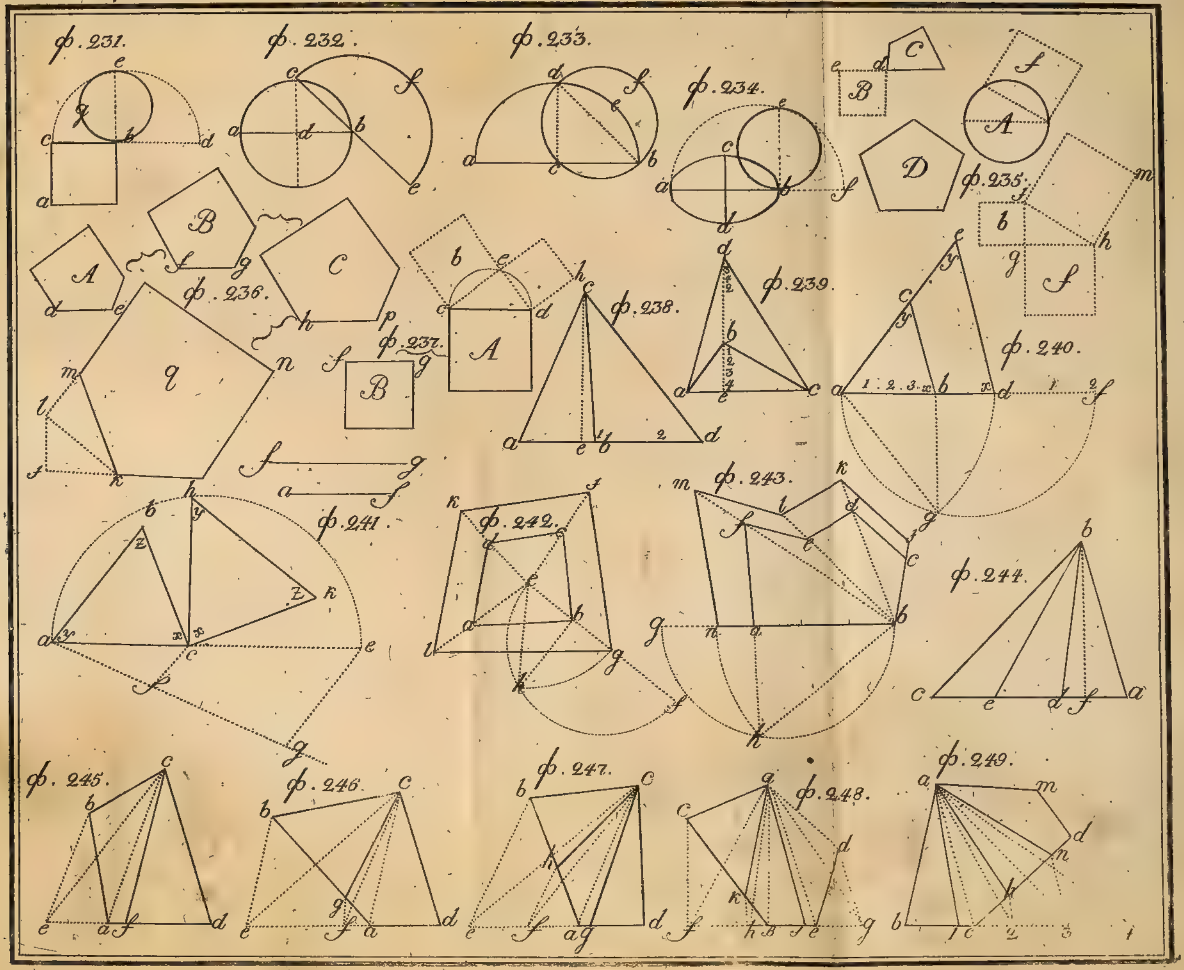
ф. 205. ф. 206. ф. 207. ф. 208.

ф. 209. ф. 210. ф. 211.

бд = ac

ф. 212. ф. 213. ф. 214. ф. 215.

ф. 216.
ф. 217.
ф. 218.
ф. 219.
ф. 220.
ф. 221.
ф. 222.
ф. 223
ф. 224.
ф. 225
ф. 226.
ф. 227.
ф. 228.
B
ф. 229.
ф. 230.


ф. 231.
ф. 232.
ф. 233.
ф. 234.
ф. 235.
ф. 236.
ф. 237.
ф. 238.
ф. 239.
ф. 240.
ф. 241.
ф. 242.
ф. 243.
ф. 244.
ф. 245.
ф. 246.
ф. 247.
ф. 248.
ф. 249.

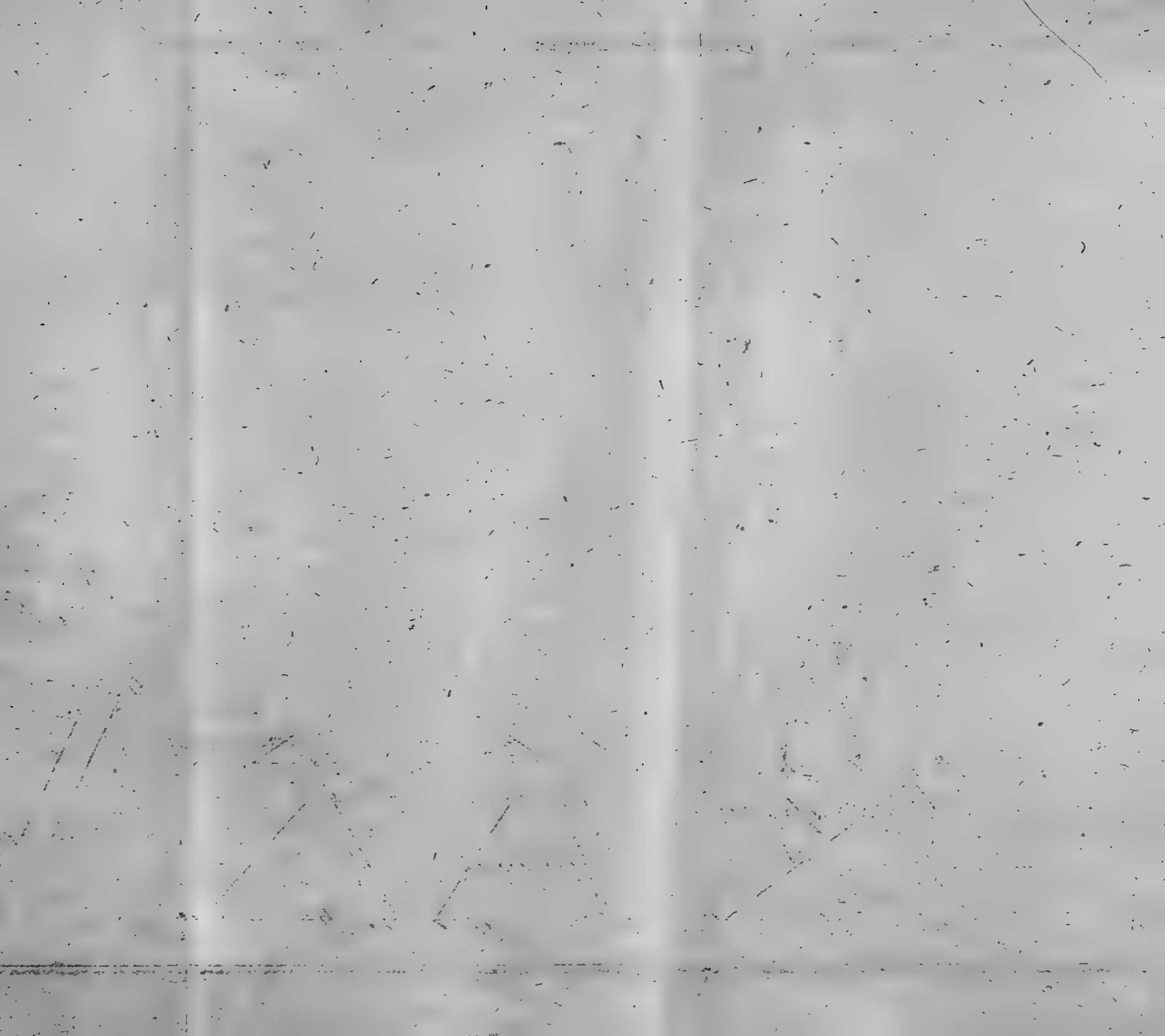
ф. 250. ф. 251. ф. 252. ф. 253.

ф. 254. ф. 255. ф. 256. ф. 257. ф. 258.

ф. 259. ф. 260. ф. 261. ф. 262.

ф. 263. ф. 264. ф. 265. ф. 266.

ф. 267. ф. 268. ф. 269.



ф. 270.

ф. 271.

ф. 272.

ф. 273.

ф. 274.

ф. 275.

ф. 276.

ф. 277.

ф. 278.

ф. 279.

ф. 280.

ф. 281.

ф. 282.

ф.283. ф.284. ф.285. ф.286. ф.287. ф.288.

ф.289. ф.290. ф.291. ф.292. ф.293. ф.294. ф.295.

ф.296. ф.297. ф.298. ф.299. ф.300. ф.301.

ф.303. ф.304. ф.305. ф.306. ф.307. ф.308.

ф.309. ф.310. ф.311. ф.312.

ф. 313.

ф. 314.

ф. 315.

ф. 316.

ф. 317.

ф. 318.

ф. 319.

ф. 320.

ф. 321.

ф. 322.

ф. 323.

ф. 324.

фиг. 325.

ф. 326.

ф. 327.

ф. 328.

ф. 329.

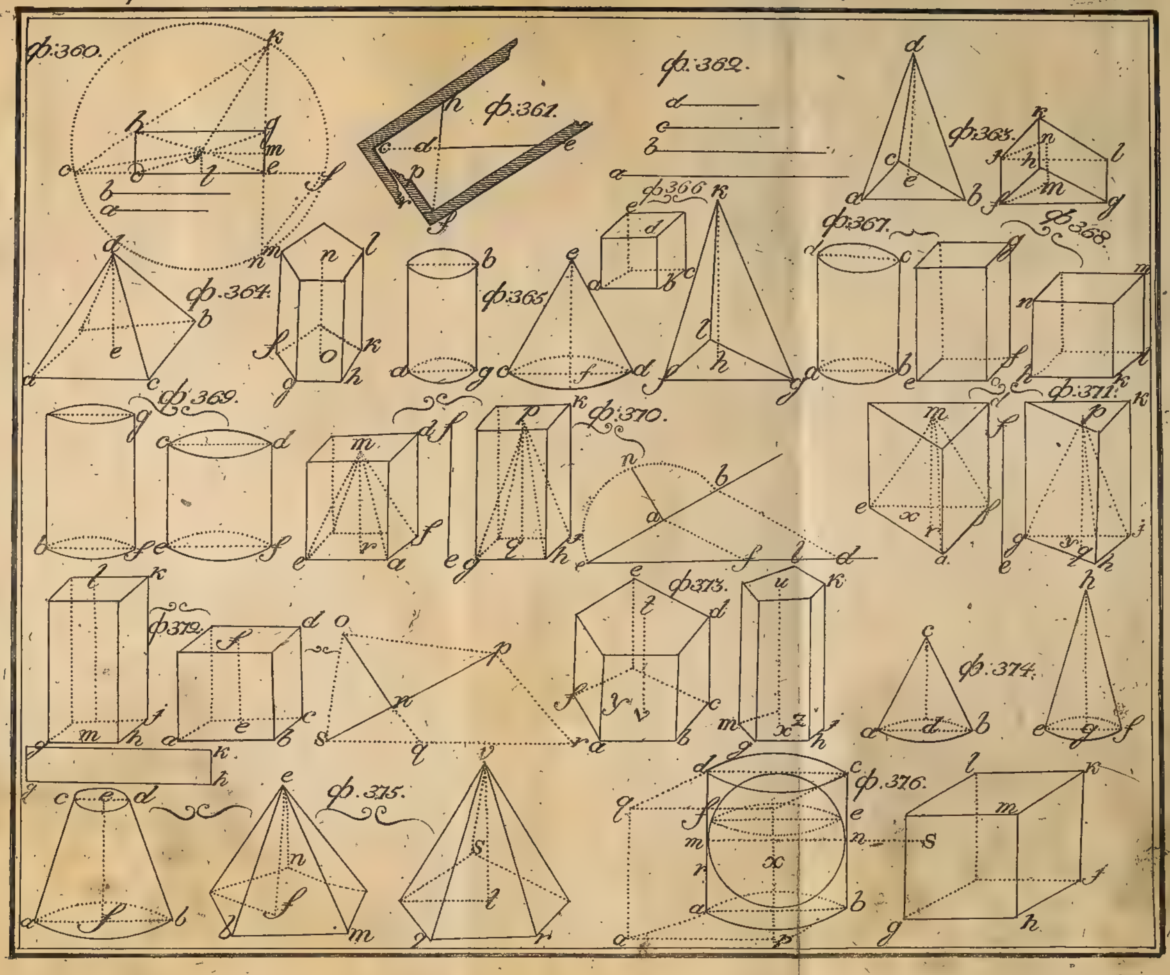
ф. 330. ф. 331. ф. 332. ф. 333. ф. 334. ф. 335. ф. 336.

ф. 337. ф. 338. ф. 339. фиг. 340. ф. 341. ф. 342. ф. 343. ф. 344.

ф. 345. ф. 346. ф. 347. ф. 348. ф. 349. ф. 359.

ф. 351. ф. 352. ф. 353. ф. 356.

ф. 354. ф. 355. ф. 359. ф. 357. ф. 358.


ф:360.
ф:361.
ф:362.
ф:363.
ф:364.
ф:365.
ф:366
ф:367.
ф:368.
ф:369.
ф:370.
ф:371.
ф:372.
ф:373.
ф:374.
ф:375.
ф:376.

ф377. ф378. ф379. ф380. ф381. ф382. ф383. ф384. ф385. ф386. ф387. ф388. ф389. ф390. ф391. ф392. ф393.

Если примемъ a за бокъ равносторонняго треугольника, который составляетъ грань тетраедра, то будетъ

поверхность тетраедра $= a^2\sqrt{3} = R^2 \cdot \frac{8}{\sqrt{3}}$

поверхность октаедра $= 2a^2\sqrt{3} = R^2 \cdot \frac{16}{\sqrt{3}}$

поверхность икосаедра $= 5a^2\sqrt{3} = R^2 \cdot \frac{40}{\sqrt{3}}$

принимая a за бокъ квадрата будетъ площадь его $= a^2$, а поверхность куба $= 6a^2 = 8R^2$

поверхность додекаедра $= 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \cdot a^2$

или $= (6-2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{25+10\sqrt{5}} \cdot R^2$, ибо

квадратъ бока пятиугольника содержится къ квадрату высоты изъ центра на бокъ опущенного какъ $20 : 5+2\sqrt{5}$, и посему

опредѣлится высота $= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)} \cdot a$

а площадь 5 треугольника $= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)} \cdot a \cdot \frac{5a}{2}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\, a^2$ умноживши сию площадь на 12 5-угольниковъ окружающихъ додекаедръ

получимъ всю поверхность $= 3\sqrt{25+10\sqrt{5}} \cdot a^2$

или полагая $a = R \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}$ =

$(6-2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{25+10\sqrt{5}}\, R^2$

$= \left(3\sqrt{25+10\sqrt{5}} - \sqrt{125+50\sqrt{5}}\right) R^2$

Бокъ тетраэдра = $R\cdot\sqrt{\frac{8}{3}}$ Если въ шаръ

—"— Эксаэдра = $R\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$ въ который сіи

—"— Октаэдра = $R\cdot\sqrt{2}$ тѣла вписаны,

—"— Додекаэдра = $R\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}$ радіусъ = R то

—"— Икозаэдра = $R\cdot\sqrt{\frac{8}{5+\sqrt{5}}}$ изъ вышеписанныхъ кратко.

Для отысканія радіуса круга описанаго около одной грани тетраэдра, Эк[саэдра] и прочая по извѣстному радіусу шара = R, имѣемъ:

радіусъ круга тетраэдра = $R\cdot\frac{\sqrt{8}}{3}$

—"— Эксаэдра = $R\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$

—"— —"— Октаэдра = $R\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$

—"— Додекаэдра = $R\cdot\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}$

—"— Икозаэдра = $R\cdot\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}$

Изъ сего видно, что радіусы круговъ около куба и октаэдра, такъ какъ и Додекаэдра и Икозаэдра въ одномъ шарѣ суть равны между собою. —

Правильныя тѣла суть тѣ, которыхъ грани равны по величинѣ и одинакимъ по [illegible].

поверхность тетраэдра = $a^2\sqrt{3} = R^2\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}$

поверхность октаэдра = $2a^2\sqrt{3} = R^2\cdot\frac{16}{\sqrt{3}}$

поверхность икозаэдра = $5a^2\sqrt{3} = R^2\cdot\frac{40}{[illegible]}$

поверхность куба = $6a^2 = 8R^2$

Гимназии

Гимназии

Конный Артиллерии

Квадр. бока додекаэдра = $R^2 \frac{6-2\sqrt{5}}{3}$
также и = $\frac{5-\sqrt{5}}{2} \cdot r^2$, посему

$$R^2 \cdot \frac{6-2\sqrt{5}}{3} = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \cdot r^2$$

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$r^2 = R^2 \cdot \frac{12-4\sqrt{5}}{15-3\sqrt{5}}$ по умножении
и сокращении на $15+3\sqrt{5}$, имеем

$$r = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}} \cdot R$$